Tentamen Classical Mechanics B

9 november 2016, 10:00 – 13:00 uur

Het tentamen bestaat uit vier opgaven, waarbij het gewicht van elke opgave steeds is aangegeven. Het totaal te behalen punten is 30. Schrijf je naam op ieder vel papier dat je inlevert. Leg steeds uit wat je doet en waarom (*alleen formules is niet voldoende*). Vectoren duidelijk aangeven met pijltjes: $\vec{r}$.

1. (4 punten)
   Het principe van d'Alembert kan geformuleerd worden als

   $$\sum_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0,$$

   waarbij de vetgedrukte symbolen vectoren zijn. Leg uit wat de betekenis is van elk van de symbolen in deze uitdrukking. Leg uit waarom de uitdrukking tussen de haakjes niet altijd gelijk aan nul is.

2. (6 punten)
   Laat zien dat invariantie onder tijdtranslatie resulteert in behoud van energie. Volg hierin onderstaande stappen.

   (a) Schrijf de totale tijdafgeleide van de Lagrangiaan, $\frac{dL}{dt}$, uit in partiële afgeleiden van elk van de variabelen waarvan L afhankelijk is.

   (b) Gebruik het feit dat L voldoet aan de Lagrangevergelijking om termen in $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ te elimineren.

   (c) Laat nu zien dat volgt dat

   $$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

   waarin h de energiefunctie is, gegeven door

   $$h = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L.$$

   (d) Voor de kinetische energie T geldt dat het een homogene kwadratische functie is van de gegeneraliseerde snelheden, waarop de stelling van Euler van toepassing is, $\sum_j \dot{q}_j(\partial T/\partial \dot{q}_j) = 2T$. Neem nu aan dat de potentiële energie niet van de snelheden afhangt, en dat L niet expliciet van de tijd afhangt. Laat dan zien dat uit het bovenstaande volgt dat de totale energie behouden is.

ZIE OMMEZIJDE

3. (10 punten)
Op een ideaal glad oppervlak bevinden zich twee puntmassa's, m_1 en m_2, die onderling zijn verbonden door een veer met veerconstante k en met rustlengte l. Het oppervlak staat scheef onder een helling ϑ met de horizon. De massa's voelen de gebruikelijke zwaartekracht, maar geen wrijvingskrachten.

(a) Maak een schets van de situatie, waarin de relevante grootheden zijn aangeduid. Kies de x- en y-coördinaten in het vlak van de beweging; verplaatsing in de z-richting laten we buiten beschouwing.

(b) Laat zien dat de Lagrangiaan voor dit probleem geschreven kan worden als

$$L = \tfrac{1}{2}M\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \tfrac{1}{2}\mu\left(\dot{s}_x^2 + \dot{s}_y^2\right) - \tfrac{1}{2}k\left(s_x^2 + s_y^2 - l^2\right) + MgY.$$

Hierin zijn X en Y de massamiddelpuntcoördinaten, s_x en s_y de relatieve coördinaten, en is M de totale massa en $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ de gereduceerde massa.

(c) Bepaal de constraints en het aantal vrijheidsgraden en schrijf de Lagrangiaan in geschikt gekozen onafhankelijke gegeneraliseerde coördinaten.

(d) Bepaal de geconjugeerde impuls bij elk van de gegeneraliseerde coördinaten.

(e) Bepaal de Hamiltoniaan voor dit probleem.

(f) Geef de vergelijkingen van Hamilton voor dit probleem.

(g) Bepaal de behouden grootheden en bespreek of het resultaat in overeenstemming is met de symmetrie-eigenschappen van het probleem.

(h) Los de bewegingsvergelijkingen op.

(i) Bepaal de beweging die resulteert voor de beginconditie dat m_1 wordt vastgehouden op een hoogte h langs de helling en het systeem in rust hangt. Op $t = 0$ wordt m_1 losgelaten.

ZIE VOLGENDE BLAD

4. (10 punten)
Bekijk het massa-veersysteem van onderstaande figuur. Het bestaat uit N gelijke massa's m, waarbij N willekeurig is, maar veel groter dan 1. De massa's kunnen alleen bewegen langs de cirkel, dus niet radieel, of in de richting uit het vlak. De verplaatsing van een massa n ten opzichte van de evenwichtspositie wordt beschreven door de coordinaat u_n, die de verplaatsing langs de cirkelboog beschrijft. Voor grote N kan het stukje cirkelboog tussen n en $n+1$ benaderd worden door een rechte lijn.

(a) Laat zien dat de Lagrangiaan voor dit systeem wordt gegeven door

$$L = \sum_{n=1}^{N} \left[\tfrac{1}{2} m \dot{u}_n^2 - \tfrac{1}{2} k (u_n - u_{n-1})^2\right]$$

(b) Bespreek het begin en eindpunt van de sommatie in bovenstaande uitdrukking, en bespreek de vraag hoe de cyclische randvoorwaarden voor het systeem in rekening kunnen worden gebracht.

(c) Leid de bewegingsvergelijkingen af uit de Lagrangiaan en laat zien dat de oplossing ervan kan worden beschreven door het gekoppelde stelsel vergelijkingen,

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) u_n - \omega_0^2 u_{n-1} - \omega_0^2 u_{n+1} = 0.$$

(d) Bepaal met behulp van deze laatste uitdrukking de eigenfrequenties van het systeem.

(e) Hoeveel verschillende oplossingen kent het stelsel differentiaalvergelijkingen? Beschrijf de bijbehorende *normal modes*.

Mogelijk nuttige gelijkheden

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)
\end{aligned}$$

++++++++++++ EINDE ++++++++++++++++++++