Tentamen Klassieke Mechanica b Herfst 2012

1. Traagheidsmoment van een driehoek

We beschouwen de driehoek zoals weergegeven in Fig. 1 in het xz-vlak met constante massadichtheid σ per oppervlak.

(a) Bereken het massamiddelpunt van de driehoek.

(b) Bereken het traagheidsmoment rond de z-as van de driehoek.

(c) De driehoek roteert nu met een hoeksnelheid ω rond de z-as. Wat is het baanimpulsmoment? Wat is de kinetische energie?

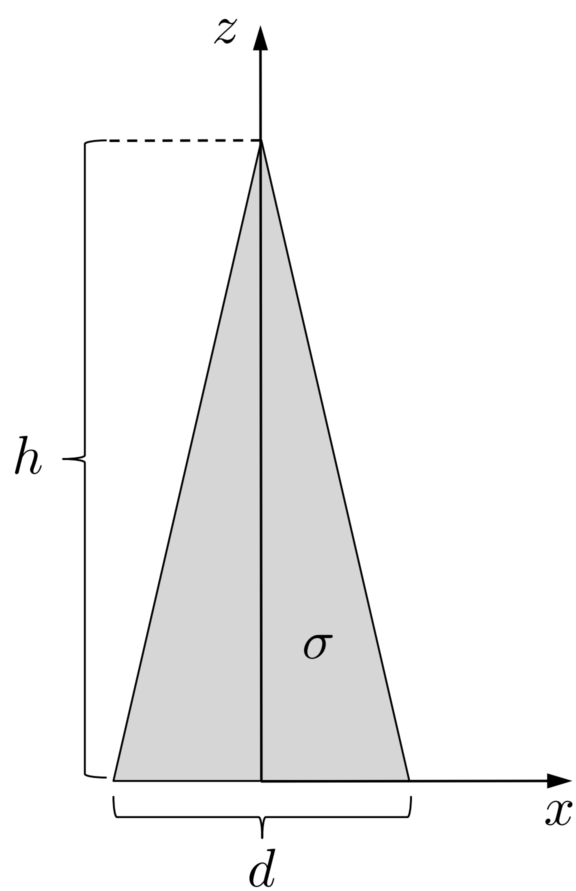

Figure 1: Schematische tekening van de gegeven situatie bij vraag 1.

2. Rotatie rond een vaste as

We beschouwen de rotatie van een star lichaam om een vaste as (x-as) met een constante hoeksnelheid ω. Het lichaam bestaat uit 2 puntmassa's, elk met massa gelijk aan m, vastgemaakt aan de x-as, zoals te zien is in Fig. 2.

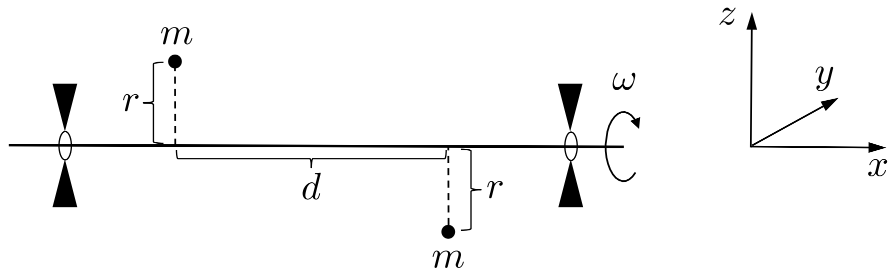

Figure 2: Schematische tekening van de gegeven situatie bij vraag 1.

De twee massa's en de x-as liggen in één en hetzelfde vlak, het xz-vlak. We willen nu het moment uitrekenen dat nodig is om de as op dezelfde plek te houden wanneer we roteren met constante hoeksnelheid ω. We gaan dit doen op twee manieren: een directe berekening zoals uitgelegd wordt in (a) en door de Euler vergelijkingen te gebruiken zoals die gegeven worden in (b).

(a) Wanneer wij de as roteren beweegt iedere massa zich in een cirkel met straal r rond de as, wat een centrifugaalkracht $m\omega^2 r$ oplevert. Bereken nu het krachtmoment dat werkt op de as als gevolg van deze krachten.
Wat gebeurt er met de richting van het krachtmoment?

(b) We gaan nu het krachtmoment opnieuw berekenen maar deze keer gebruiken we de Euler Vergelijkingen:

$$N_1 = I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right)$$

$$N_2 = I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1\left(I_1 - I_3\right)$$

$$N_3 = I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right)$$

Het $(1, 2, 3)$-coordinaten systeem is georiënteerd langs de 3 hoofdassen van het lichaam. Bereken de hoofdtraagheidsmomenten I_1, I_2 en I_3 en de rotatievector $\vec{\omega}$ met componenten ω_1, ω_2 and ω_3 voor de situatie gegeven in Fig. 2.
(Hint: Het resultaat voor het krachtmoment moet gelijk zijn aan dat gevonden in (a)).

3. Pendulum

Beschouw een pendulum in een gravitatieveld dat in de $-z$-richting staat. De pendulum bestaat uit een puntmassa m op een vaste afstand l van de oorsprong. De massa beweegt alleen in het xz-vlak.

(a) Geef de bewegingsvergelijkingen voor dit systeem met behulp van het Lagrange formalisme.
(Hint: Schrijf de Langrangiaan $L = T - U$ in poolcoordinaten (θ, r) en gebruik vervolgens de Lagrange vergelijkingen om de bewegingsvergelijking op te stellen.)

(b) Los de bewegingsvergelijking op voor kleine amplitudes.
(Hint: harmonische oscillator).

(c) Wat is de kracht op de verbindende lijn tussen de oorsprong en de puntmassa voor een gegeven amplitude en hoeksnelheid $\dot{\theta}$?
(Hint: De centrifugaalkracht wordt gegeven door $m\dot{\theta}^2 l$).

(d) We gaan deze kracht nu berekenen met de methode van Lagrange Multipliers. We stellen een nieuwe Langrangiaan op, $L' = L + \lambda g$, met $\lambda(t)$ is Lagrange Multiplier en g is een functie van de gegeneraliseerde coordinaten zodat $g = 0$ de beperkende voorwaarde geeft (constraint) van de pendulum. De nieuwe Langrangiaan heeft dan de vorm $L' = L'\left(\theta, \dot{\theta}, r, \dot{r}, \lambda\right)$. Dit resulteert in 3 nieuwe Langrangiaanse vergelijkingen. Geef deze 3 vergelijkingen.

(e) De kracht op de verbindende lijn wordt nu gegeven door: $F_r = \lambda \frac{\partial g}{\partial r}$. Laat zien dat dit inderdaad gelijk is aan het antwoord gevonden bij (c).