Tentamen Klassieke Mechanica I
Maandag 18 juni 2001
Duur: 3 uur

Vermeld op elk blad duidelijk je naam, studierichting, en collegekaartnummer!

(TIP: lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag)

OPGAVE 1

Twee auto's zijn uitgerust met dezelfde banden, allemaal met een (dynamische) wrijvingscoëfficiënt $\mu = 0.8$. De eerste auto heeft een massa van 1600 kg, terwijl de tweede een massa heeft van slechts 800 kg.

a) Als beide auto's met gelijke snelheid rijden en vanaf tijdstip $t = 0$ maximaal remmen (géén antiblokkeersysteem, dus slippende banden), welke auto staat dan als eerste stil? Beredeneer je antwoord.

b) Stel voor een auto met massa m de bewegingsvergelijking op, als deze bij beginsnelheid v_0, vanaf tijdstip $t = 0$ maximaal remt, met wrijvingscoëfficiënt μ. Los hieruit de snelheid van de auto op als functie van de tijd. Na hoeveel tijd staat de auto stil?

c) Gebruik het antwoord bij b) om de positie van de auto als functie van de tijd uit te rekenen. Hoe groot is de totale remweg, m.a.w. na welke afstand komt de auto tot stilstand?

d) We brengen de auto van b) opnieuw naar beginsnelheid v_0, en laten hem vanaf tijdstip $t = 0$ uitrollen. Neem aan dat de totale wrijvingskracht evenredig is met de snelheid van de auto, $F_w = -bv$. Reken de snelheid uit van de auto als functie van de tijd. Laat vervolgens zien dat de positie van de auto beschreven wordt door $x(t) = \frac{mv_0}{b}\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right]$.

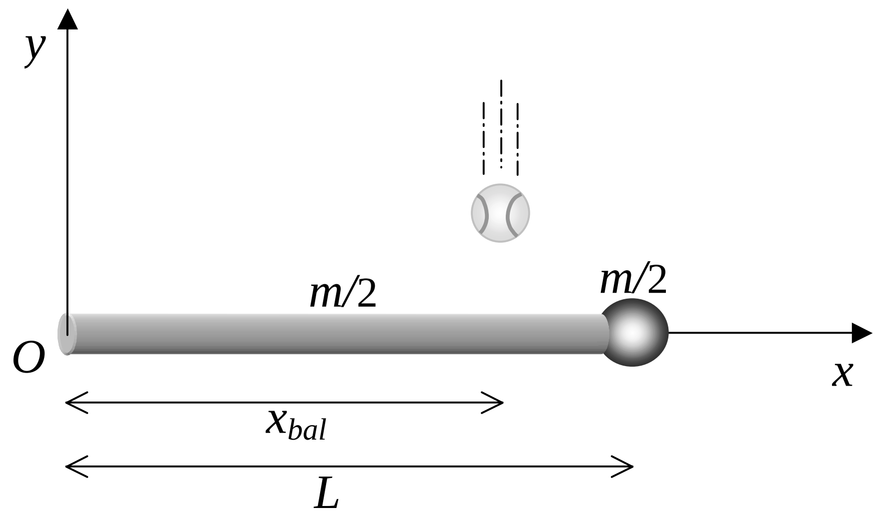
e) Dezelfde vragen als bij d), maar nu voor de situatie dat de wrijvingskracht evenredig is met het kwadraat van de snelheid, $F_w = -cv^2$. Laat hier zien dat de positie van de auto beschreven wordt door $x(t) = \frac{m}{c}\ln\left(1 + \frac{c}{m}v_0 t\right)$.

f) Vergelijk de drie remscenario's bij b), d) en e). Kies de constanten μ, b en c zodanig dat de initiële wrijvingskracht, op $t = 0$, telkens gelijk is aan F_0. Hoe groot is de totale remweg in elk van de drie gevallen?

OPGAVE 2

Tennisspelers en honkbalspelers weten dat ze de "prettigste" slag geven als ze de bal precies met het juiste deel van het racket of slaghout raken, de zogenaamde "sweet spot". In de klassieke mechanica staat dit punt bekend als het "percussiecentrum": als precies op dat punt een kracht(stoot) wordt uitgeoefend, resulteert dat niet in een versnelling van de plaats waar het slaghout wordt vastgehouden, en wordt er dus ook geen kracht uitgeoefend op de hand van de speler. We zullen de positie van de sweet spot stapsgewijs uitrekenen voor een eenvoudig model van een slaghout.

We modelleren het slaghout als een uniforme staaf met lengte L en massa $\frac{1}{2}m$, met aan het uiteinde een additionele puntmassa van $\frac{1}{2}m$. Het slaghout wordt helemaal links vastgehouden, bij de oorsprong *O*.



a) Op welke positie x_{MM} ligt het massamiddelpunt ten opzichte van de oorsprong?
b) Reken het traagheidsmoment I_0 uit ten opzichte van de oorsprong.
c) Is het traagheidsmoment I_{MM} ten opzichte van het massamiddelpunt groter dan, kleiner dan, of gelijk aan I_0? Licht je antwoord toe.
d) Gebruik het resultaat van a) en b) en het parallelle-as theorema om het traagheidsmoment I_{MM} te bepalen ten opzichte van het massamiddelpunt. Als je bij a) of b) geen antwoord had, gebruik dan de symbolen x_{MM} en I_0 en geef aan hoe je verder moet rekenen.

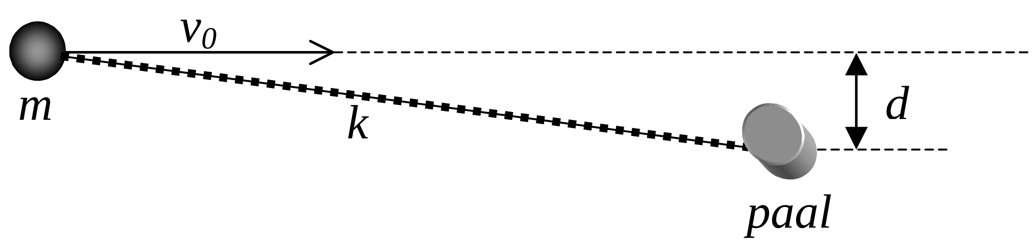
Het stilstaande slaghout wordt op een positie $x_{bal} > x_{MM}$ geraakt door een bal die in de negatieve y-richting beweegt. Neem aan dat alleen de bal een kracht uitoefent en laat de andere krachten buiten beschouwing (door hand uitgeoefende kracht, zwaartekracht). Ga ervan uit dat de grootte van de kortstondige kracht (in de negatieve y-richting) van de bal beschreven wordt door $F(t)$, met krachtstoot $S = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt$.

e) Hoe groot zijn na de klap de translatiesnelheid $\vec{v}_{MM}$ van het massamiddelpunt en de hoeksnelheid $\vec{\omega}$ van het slaghout? Geef ook de richtingen aan.

f) Hoe groot is direct na de klap de translatiesnelheid $\vec{v}_O$ van het linkeruiteinde van het slaghout, dat oorspronkelijk in de oorsprong zit? Reken tenslotte voor dat we het inslagpunt van de bal op $x_{bal} = \frac{8}{9}L$ moeten kiezen om deze translatiesnelheid nul te maken, en zo de klap op de hand te minimaliseren.

OPGAVE 3

Een bal met massa m ligt op een wrijvingsloze ondergrond en is door een massaloze veer, met een evenwichtslengte van nul en een veerconstante k, verbonden met een vaste paal. De veer draait wrijvingsloos met de bal mee om de paal en oefent een trekkracht uit langs de verbindingslijn bal-paal. We starten de bal met beginsnelheid v_0 langs een horizontaal pad dat gericht is op een afstand $d \neq 0$ langs de paal (zie tekening).



a) Stel de radiële bewegingsvergelijking op voor de bal (nog niet oplossen).
b) Geef een uitdrukking voor de effectieve potentiële energie $V_{eff}(r)$ als functie van de radiële coördinaat r.
c) Maak een kwalitatieve schets van de effectieve potentiële energie $V_{eff}(r)$ en haar componenten.
d) Voor elke keuze van de begincondities, v_0 en $d \neq 0$, vertoont $V_{eff}(r)$ een minimum. Leid uitdrukkingen af voor de minimale effectieve potentiële energie en voor de afstand $r_{\min}$ waarop dit minimum optreedt.
e) Aan welk voorwaarde(n) moeten de startcondities voldoen, om precies in het bij d) besproken minimum uit te komen? Wat voor baan beschrijft de bal dan? Wat is de omlooptijd van die baan?
f) Als we met de begincondities iets naast de bij e) bedoelde condities zitten, wat voor verandering veroorzaakt dat in de baan? Hoe groot is de karakteristieke tijd voor die verandering?