Tentamen Klassieke Mechanica I
Dinsdag 31 juli 2001

OPGAVE 1

a) We moeten zowel van de wet van behoud van impuls als van de wet van behoud van energie gebruik maken. Bij het binnendringen van de kogel in het blok is sprake van een inelastisch proces; daarbij gaat energie verloren. De snelheid waarmee de combinatie blok+kogel verder beweegt kunnen we met de wet van impulsbehoud uitrekenen. Hoe hoog de combinatie vervolgens komt, kan vervolgens met de wet van behoud van energie worden uitgerekend.

b) Impulsbehoud: $(m+M)v = mv_0 \Rightarrow v = v_0 \dfrac{m}{m+M} = 300 \cdot \dfrac{0.005}{2.005}$ m/s ≈ 0.75 m/s .

c) Energiebehoud: $(m+M)gh = \frac{1}{2}(m+M)v^2$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2g}v^2 = \frac{1}{2g}v_0^2\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 = \frac{1}{19.6}(300)^2\left(\frac{0.005}{2.005}\right)^2 \text{ m} \approx 2.9\,\text{cm}$$

d) Het verschil bij de rubberen kogel is dat deze tweemaal zoveel impuls overdraagt. Het blok krijgt daardoor een twee maal zo grote snelheid en komt dan ook vier maal zo hoog, namelijk tot 11.4 cm.

e) De snelheid van de kogel neemt af volgens $v_k = v_0 - \dfrac{F}{m}t$. Met behulp van impulsbehoud rekenen we de snelheid van het blok uit: $v_b = \dfrac{m}{M}(v_0 - v_k) = \dfrac{F}{M}t$. Het afremmen stopt op het tijdstip t_{stil} waarop v_k en v_b aan elkaar gelijk worden. Daaruit volgt $t_{stil} = \dfrac{v_0}{F}\dfrac{mM}{m+M}$.

f) De afstand die de kogel aflegt tot aan het moment van vastlopen in het blok is

$$l_k = \int_0^{t_{stil}} v_k\,dt = v_0 t_{stil} - \frac{1}{2}\frac{F}{m}t_{stil}^2 = \frac{v_0^2}{F}\frac{mM}{m+M}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{M}{m+M}\right].$$

De afstand die het blok in die tijd aflegt bedraagt

$$l_b = \int_0^{t_{stil}} v_b\,dt = \frac{1}{2}\frac{F}{M}t_{stil}^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{F}\frac{m^2 M}{(m+M)^2}.$$

De diepte waarop de kogel blijft steken is het verschil tussen deze uitdrukkingen,

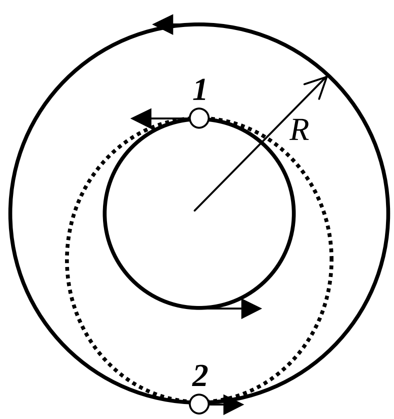
$$l_k - l_b = \frac{v_0^2}{F}\frac{mM}{m+M}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{M}{m+M} - \frac{1}{2}\frac{m}{m+M}\right] = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{F}\frac{mM}{m+M}.$$

OPGAVE 2

a) Om voortdurend boven hetzelfde punt op aarde te blijven staan, moet de rotatievector van de satelliet precies overeenkomen met die van de aarde (zowel grootte als richting). Dat kan maar op één manier, namelijk als de satelliet een cirkelbaan beschrijft, waarbij deze op een specifieke hoogte (zie b) boven de evenaar staat, en net als de aarde ‘naar het oosten’ draait. De persoon op aarde, pal onder de satelliet, moet zich dus op de evenaar bevinden.

b) De potentiële energie in het zwaartekrachtsveld van de aarde bedraagt $V(R) = -G\dfrac{mM_{aarde}}{R}$. Omdat de zwaartekrachtsversnelling op het aardoppervlak gegeven is, weten we dat $G\dfrac{M_{aarde}}{R_{aarde}^2} = g \Rightarrow GM_{aarde} = gR_{aarde}^2 = 10\times\left(6.5\cdot 10^6\right)^2$ m^3/s^2. Er zijn diverse manieren om de snelheid uit te rekenen voor de satelliet met massa m in een cirkelbaan met straal R. Wij nemen hier bijvoorbeeld $\tfrac{1}{2}mv^2 = K = -\tfrac{1}{2}V(R) = \tfrac{1}{2}G\dfrac{mM_{aarde}}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \dfrac{GM_{aarde}}{R}$. De omlooptijd moet precies een etmaal bedragen, dus $\dfrac{2\pi R}{v} = T = 24\times 3600$ s. De combinatie van de laatste twee uitdrukkingen geeft $R^3 = \dfrac{T^2}{4\pi^2}GM_{aarde}$. Met onze uitdrukking voor GM_{aarde}, komen we zo tot $R = \sqrt[3]{g\dfrac{T^2R_{aarde}^2}{4\pi^2}} \approx 43000$ km.

c) De beste afvuurrichting van de motor is telkens zodanig dat deze kracht levert in de richting van de (momentane) snelheid van de satelliet. Met de motor verander je de impuls(vector). Om ervoor te zorgen dat de nieuwe impuls zo groot mogelijk is, moet je de richting van de impulsverandering gelijk kiezen aan de richting van de reeds aanwezige impuls. Het eerste moment voor het versnellen van de satelliet is willekeurig gekozen (nr. 1 in de figuur). De satelliet komt nu in een ellipsbaan, die als dichtstbijzijnde afstand de oorspronkelijke afstand heeft van $\tfrac{1}{2}R$, en als grootste afstand de gewenste straal R. Op het moment dat deze grootste afstand bereikt wordt, wordt de satelliet voor de tweede keer versneld (nr. 2 in de figuur).



d) De totale energie in de eerste baan bedraagt $E_1 = -\frac{\alpha}{2\times\frac{1}{2}R} = -\frac{\alpha}{R}$, waarbij $\alpha \equiv GmM_{aarde}$, en de kinetische energie is $K_1 = \frac{\alpha}{R}$. Na de volledige operatie bedraagt de totale energie $E_3 = -\frac{\alpha}{2R}$ en de kinetische energie van de satelliet is dan $K_3 = -\frac{\alpha}{2R}$. Tijdens de tussenliggende ellipsbaan bedraagt de totale energie $E_2 = -\frac{\alpha}{2\times\frac{3}{4}R} = -\frac{2\alpha}{3R}$, en de kinetische energie $K_2(R)$ is dan een functie van de positie langs de baan. De totale energie-investering bedraagt dus $E_3 - E_1 = \frac{\alpha}{2R} = \frac{GmM_{aarde}}{2R} = \frac{mgR_{aarde}^2}{2R}$.

e) i) Voordat de motor voor het eerst wordt aangezet:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2K_1}{m}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{mR}} = \sqrt{\frac{2GM_{aarde}}{R}} = \sqrt{\frac{2gR_{aarde}^2}{R}}.$$

ii) Direct nadat de motor de eerste snelheidsverandering teweeg heeft gebracht, is de afstand nog steeds $\frac{1}{2}R$, en bedraagt de potentiële energie nog steeds $V\left(\frac{1}{2}R\right) = -\frac{2\alpha}{R}$. De kinetische energie vinden we door deze potentiële energie af te trekken van de totale energie in de ellipsbaan (zie onderdeel d):

$$K_2\left(\tfrac{1}{2}R\right) = E_2 - V\left(\tfrac{1}{2}R\right) = -\frac{2\alpha}{3R} + \frac{2\alpha}{R} = \frac{4\alpha}{3R} \quad \Rightarrow \quad v_2\left(\tfrac{1}{2}R\right) = \sqrt{\frac{2K_2(\frac{1}{2}R)}{m}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot v_1.$$

iii) Vlak voordat de motor voor de tweede keer wordt aangezet:

$$K_2(R) = E_2 - V(R) = -\frac{2\alpha}{3R} + \frac{\alpha}{R} = \frac{\alpha}{3R} \quad \Rightarrow \quad v_2(R) = \sqrt{\frac{2K_2(R)}{m}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\cdot v_1.$$

iv) Nadat de motor de tweede snelheidsverandering teweeg heeft gebracht:

$$v_3 = \sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \sqrt{\frac{\alpha}{mR}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot v_1.$$

f) De eerste snelheidsverandering bedraagt (zie e) $v_2\left(\frac{1}{2}R\right) - v_1 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)\sqrt{\frac{2gR_{aarde}^2}{R}}$.

Invullen van de uitdrukking bij b) voor R levert:

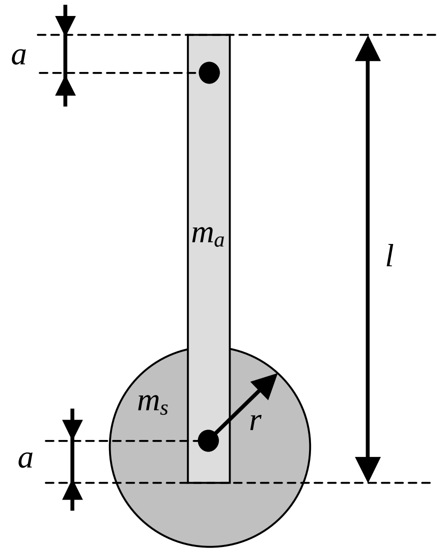
$$\Delta v_{1\to2} = \left(\tfrac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)\cdot 2\left(\frac{\pi g R_{aarde}^2}{\sqrt{2}T}\right)^{1/3} = 685\ \text{m/s}.$$

Op dezelfde manier vinden we voor de tweede versnelling:

$$\Delta v_{2\to3} = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right)\cdot 2\left(\frac{\pi g R_{aarde}^2}{\sqrt{2}T}\right)^{1/3} = 575\ \text{m/s}.$$

Bij de gegeven maximale versnelling van $10\ \text{m/s}^2$ moet de motor respectievelijk 68.5 s en 57.5 s worden aangezet.

OPGAVE 3



a) Als de schijf gefixeerd zit aan de arm, dan heeft deze een hoger traagheidsmoment, en zal de de rotatiesnelhied van de slinger (arm+schijf) bij gelijk krachtmoment minder veranderen. Het gevolg is een grotere slingertijd.

b) Arm: $I_a = 2\frac{m_a}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} m_a l^2$, en schijf: $I_s = \frac{m_s}{\pi r^2}\int_0^r r'^2 2\pi r' dr' = \frac{1}{2} m_s r^2$.

c) Gebruik nu de parallelle-as regel:

$$I'_a = \tfrac{1}{12} m_a l^2 + m_a \left(\tfrac{1}{2} l - a\right)^2 .$$

Voor de twee gevallen voor de schijf, vinden we:

$I'_s = m_s (l-2a)^2$ (vrij draaiende schijf)

en

$I''_s = \frac{1}{2} m_s r^2 + m_s (l-2a)^2$ (gefixeerde schijf).

d) Vrij draaiende schijf: $L_{vrij} = I_{vrij}\dot\theta = \dot\theta\left[\tfrac{1}{12} m_a l^2 + m_a\left(\tfrac{1}{2} l - a\right)^2 + m_s (l-2a)^2\right]$

$K_{vrij} = \tfrac{1}{2} I_{vrij}\dot\theta^2 = \tfrac{1}{2}\dot\theta^2\left[\tfrac{1}{12} m_a l^2 + m_a\left(\tfrac{1}{2} l - a\right)^2 + m_s (l-2a)^2\right]$

Gefixeerde schijf: $L_{vast} = I_{vast}\dot\theta = \dot\theta\left[\tfrac{1}{12} m_a l^2 + m_a\left(\tfrac{1}{2} l - a\right)^2 + \tfrac{1}{2} m_s r^2 + m_s (l-2a)^2\right]$

$K_{vast} = \tfrac{1}{2} I_{vast}\dot\theta^2 = \tfrac{1}{2}\dot\theta^2\left[\tfrac{1}{12} m_a l^2 + m_a\left(\tfrac{1}{2} l - a\right)^2 + \tfrac{1}{2} m_s r^2 + m_s (l-2a)^2\right]$

e) Krachtmoment: $N = \left(\tfrac{1}{2} l - a\right) m_a g \sin\theta + (l-2a) m_s g \sin\theta = \left(\tfrac{1}{2} m_a + m_s\right)(l-2a) g \sin\theta$.

f) Maak voor de bewegingsvgln. gebruik van: $\dot L = N$, en benader: $\sin\theta \cong \theta$. Voor de twee gevallen vinden we:

$\ddot\theta \cong -\frac{\left(\frac{1}{2} m_a + m_s\right)(l-2a) g}{I}\theta$ (let op het min-teken!), waarbij het traagheidsmoment gelijk is aan I_{vrij} of I_{vast} (zie d). Het resultaat is een harmonische slingering (voor kleine uitwijkingen) met een hoekfrequentie $\omega = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2} m_a + m_s\right)(l-2a) g}{I}}$. Omdat $I_{vast} > I_{vrij}$ (zie d) wordt voor de vaste schijf de frequentie lager, dus de slingertijd groter (zie a).