Uitwerking Tentamen Klassieke Mechanica I
Maandag 18 juni 2001

OPGAVE 1

a) De remtijd en remweg zijn voor de twee auto's precies gelijk. De reden hiervoor is dat de wrijvingskracht $F_w = -\mu mg$ evenredig is met de massa. De zware auto heeft dus weliswaar een tweemaal zo hoge impuls als de lichte auto, maar ondervindt ook een tweemaal zo hoge remkracht. Omdat voor beide auto's $\dot{p} = F_w$, is voor de twee auto's op precies hetzelfde tijdstip de snelheid tot nul gereduceerd.

b) Bewegingsvergelijking: $m\ddot{x} = -\mu mg \quad \Leftrightarrow \quad m\dot{v} = -\mu mg$. Oplossing voor snelheid:

$$v(t) = v_0 - \mu gt .$$

De auto staat stil als $v = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \dfrac{v_0}{\mu g}$.

c) Integreren van de uitdrukking voor de snelheid bij b) geeft:

$$x(t) = v_0 t - \tfrac{1}{2}\mu g t^2 .$$

De totale afgelegde weg op tijdstip t^* bedraagt:

$$x(t^*) = \frac{v_0^2}{2\mu g} .$$

d) Bewegingsvergelijking: $m\ddot{x} = -b\dot{x} \quad \Leftrightarrow \quad m\dot{v} = -bv \quad \Leftrightarrow \quad \displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'} = -\tfrac{b}{m}\int_0^t dt'$. Integreren geeft:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\tfrac{b}{m}t \quad \Leftrightarrow \quad v = v_0 \exp\left(-\tfrac{b}{m}t\right).$$

Nogmaals integreren: $\displaystyle\int_0^x dx' = v_0 \int_0^t \exp\left(-\tfrac{b}{m}t'\right)dt'$. Dit levert het gevraagde resultaat op:

$$x(t) = \frac{mv_0}{b}\left[1 - \exp\left(-\tfrac{b}{m}t\right)\right].$$

e) Bewegingsvergelijking: $m\ddot{x} = -c\dot{x}^2 \quad \Leftrightarrow \quad m\dot{v} = -cv^2 \quad \Leftrightarrow \quad \displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{(v')^2} = -\tfrac{c}{m}\int_0^t dt'$. Integreren geeft:

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -\tfrac{c}{m}t \quad \Leftrightarrow \quad v(t) = \frac{v_0}{1 + \tfrac{c}{m}v_0 t} .$$

Nogmaals integreren: $\displaystyle\int_0^x dx' = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \tfrac{c}{m}v_0 t'}dt'$. Dit levert het gevraagde resultaat op:

$$x(t) = \frac{m}{c}\ln\left(1 + \tfrac{c}{m}v_0 t\right).$$

f) $\mu = \frac{F_0}{mg}$, $b = \frac{F_0}{v_0}$, $c = \frac{F_0}{v_0^2}$. De drie remwegen zijn respectievelijk:

$$x(t^*) = \frac{mv_0^2}{2F_0},\ x(t=\infty) = \frac{mv_0^2}{F_0},\ \text{en}\ x(t=\infty) = \frac{mv_0^2}{F_0}\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{F_0}{mv_0}t\right)\right] = \infty .$$

OPGAVE 2

a) $x_{MM}\, m = \int_0^L \left(\frac{\frac{1}{2}m}{L}\right) x\,dx + \frac{1}{2}mL = \frac{3}{4}mL \quad \Rightarrow \quad x_{MM} = \frac{3}{4}L$

b) $I_0 = \frac{\frac{1}{2}m}{L}\int_0^L l^2\,dl + \frac{1}{2}mL^2 = \frac{2}{3}mL^2$

c) Het traagheidsmoment I_{MM} ten opzichte van het massamiddelpunt is kleiner dan I_0. Ten opzichte van een as door het massamiddelpunt is het traagheidsmoment kleiner dan ten opzichte van elke andere daaraan evenwijdige as. De toename kan worden uitgerekend met het parallelle-as theorema (zie d).

d) Op deze situatie toegepast, luidt het parallelle-as theorema: $I_0 = I_{MM} + mx_{MM}^2$. Hieruit volgt: $I_{MM} = I_0 - mx_{MM}^2 = \frac{2}{3}mL^2 - m\left(\frac{3}{4}L\right)^2 = \frac{5}{48}mL^2$.

e) De krachtstoot $\vec{S}$ is gelijk aan de impuls van het slaghout na de klap. De translatiesnelheid $\vec{v}_{MM}$ van het massamiddelpunt vinden we door deze impuls te delen door de totale massa m. Dus $\vec{v}_{MM} = \frac{\vec{S}}{m} = -\frac{S}{m}\hat{y}$, waarbij $\hat{y}$ de eenheidsvector in de (positieve) y-richting is. De krachtmomentstoot ten opzichte van het massamiddelpunt bedraagt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{N}_{MM}\,dt = -\hat{z}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_{bal} - x_{MM})F(t)dt = \hat{z}(x_{MM} - x_{bal})\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)dt = \hat{z}(x_{MM} - x_{bal})S .$$

Deze is gelijk aan het impulsmoment van het slaghout na de klap, ten opzichte van het massamiddelpunt, $\vec{L}_{MM} = I_{MM}\vec{\omega}$. Hieruit volgt

$$\vec{\omega} = \hat{z}\frac{x_{MM} - x_{bal}}{I_{MM}}S .$$

De grootte van de krachtmomentstoot S kunnen we ook uitdrukken in de grootte van de snelheid van het massamiddelpunt, zodat we voor de hoeksnelheid vinden:

$$\vec{\omega} = \hat{z}\frac{x_{MM} - x_{bal}}{\frac{5}{48}mL^2}mv_{MM} = \hat{z}\frac{x_{MM} - x_{bal}}{\frac{5}{48}L^2}v_{MM} .$$

Omdat $x_{bal} > x_{MM}$, is dit een vector in de negatieve z-richting, en is de rotatie dus met de klok mee.

f) Om de translatiesnelheid van het linkeruiteinde van het slaghout uit te rekenen, maken we gebruik van

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{MM} + \vec{\omega}\times(0 - x_{MM})\hat{x} = \vec{v}_{MM} - \hat{y}v_{MM}\frac{(x_{MM} - x_{bal})x_{MM}}{\frac{5}{48}L^2}.$$

Omdat $\vec{v}_{MM} = -\hat{y}v_{MM}$, herschrijven we dit tot

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{MM}\left[1 + \frac{(x_{MM} - x_{bal})x_{MM}}{\frac{5}{48}L^2}\right].$$

De sweet spot x_{sweet} is die keuze voor x_{bal} waarvoor de snelheid van het linkeruiteinde na de klap nog steeds nul is. Daaruit volgt

$$1 + \frac{(x_{MM} - x_{sweet})x_{MM}}{\frac{5}{48}L^2} = 0,$$

waaruit we voor de sweet spot vinden dat

$$x_{sweet} = x_{MM} + \frac{\frac{5}{48}L^2}{x_{MM}} = \frac{3}{4}L + \frac{\frac{5}{48}L^2}{\frac{3}{4}L} = \frac{8}{9}L.$$

OPGAVE 3

a) De radiële bewegingsvergelijking wordt gegeven door:

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3} = -kr + \frac{(mv_0 d)^2}{mr^3} = -kr + \frac{mv_0^2 d^2}{r^3}.$$

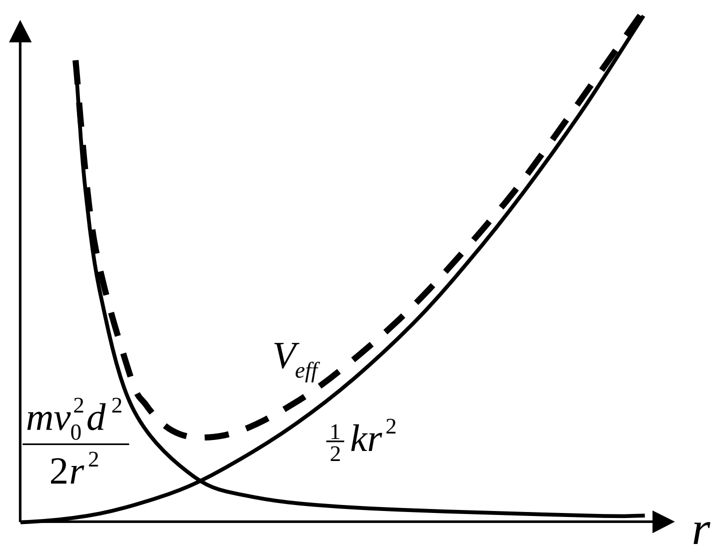
Hierbij is L het (constante) impulsmoment, en stelt r de afstand voor tussen de bal en de paal.

b) We vinden de effectieve potentiële energie door integratie van de radiële bewegingsvergelijking t.o.v. een geschikt gekozen nulpunt. Er zijn veel keuzemogelijkheden voor dit nulpunt, en niet alle bijdragen aan de potentiële energie hoeven hun nulpunt op dezelfde positie te hebben. In dit geval ligt het voor de hand het nulpunt voor de bijdrage van de veer in de oorsprong te leggen, en dat voor de centrifugaal-bijdrage in het oneindige. Voor deze keuze van de nulpunten vinden we.

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}mv_0^2\frac{d^2}{r^2}.$$

Voor andere keuzen van de nulpunten wordt bij deze uitdrukking voor alle r een vast bedrag (integratie-constante) opgeteld. Alle gemaakte keuzes zijn uiteraard goedgerekend.

c) V_{eff} en haar componenten: (zie figuur).



d) Het minimum in V_{eff} vinden we uit:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = kr - \frac{mv_0^2 d^2}{r^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\min} = (v_0 d)^{1/2} \left(\frac{m}{k} \right)^{1/4} .$$

Hieruit vinden we

$$V_{eff}(r_{\min}) = \tfrac{1}{2} k v_0 d \sqrt{\frac{m}{k}} + \tfrac{1}{2} m v_0^2 d^2 (v_0 d)^{-1} \sqrt{\frac{k}{m}} = v_0 d \sqrt{km} .$$

e) De baan die met het minimum overeenkomt is een cirkelbaan met straal $r_{\min}$. Om in deze baan terecht te komen, moet de beginsnelheid loodrecht staan op de beginrichting van de veer, zodat $r_{\min} = d$. Gebruik makend van het resultaat bij d) vinden we de combinaties van beginsnelheid en straal

$v_0 = d\sqrt{\frac{k}{m}}$. De omlooptijd bedraagt

$$T_{omloop} = \frac{2\pi d}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

f) Bij enigszins andere begincondities, zal r een schommelbeweging uitvoeren rondom $r_{\min}$. De ‘veerconstante’ waarmee de bal naar $r_{\min}$ wordt versneld is gelijk aan de tweede afgeleide van de effectieve potentiële energie naar de afstand, op positie $r_{\min}$:

$$k_{fluctuatie} = \left. \frac{d^2 V_{eff}}{dr} \right|_{r=r_{\min}} = k + 3mv_0^2 \frac{d^2}{r_{\min}^4} = k + 3k = 4k .$$

De frequentie waarmee wordt geschommeld is dan

$$f_{fluctuatie} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{fluctuatie}}{m}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} ,$$

en de tijd voor één schommeling bedraagt

$T_{fluctuatie} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. Er passen dus precies twee schommelingen op een volledige omloop.