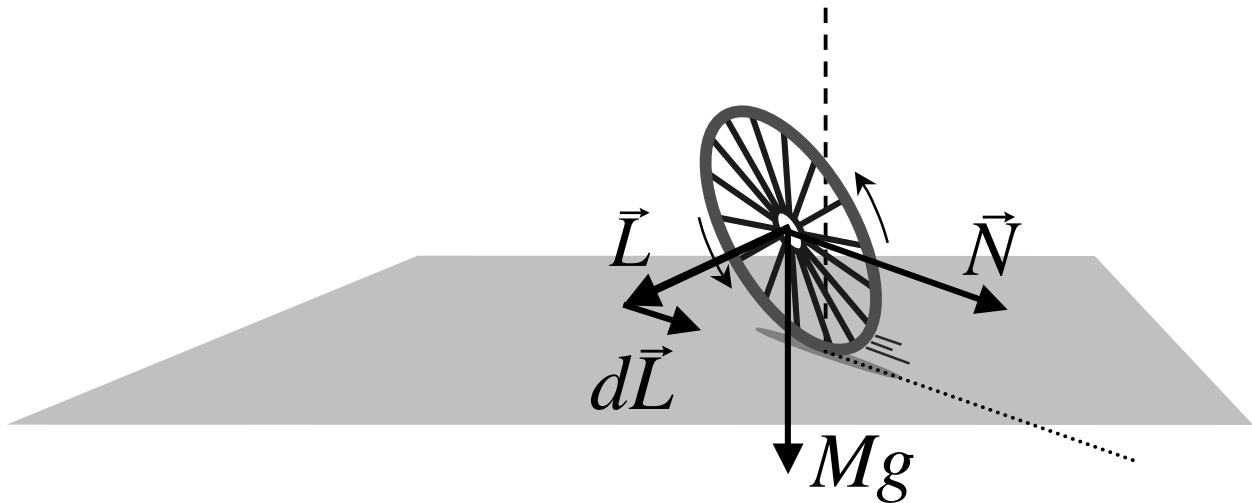


Uitwerking tentamen Klassieke Mechanica I
Maandag 14 mei 2001

OPGAVE 1

- a) De zwaartekracht die op het wiel werkt, veroorzaakt een krachtmoment \vec{N} t.o.v. het raakpunt tussen wiel en ondergrond. Het krachtmoment is horizontaal gericht, en staat precies tegen de bewegingsrichting in. Het impulsmoment \vec{L} (zie figuur) zal hierdoor gaan veranderen, volgens $\dot{\vec{L}} = \vec{N}$. De situatie is precies die van een gyroscoop. De grootte van het impulsmoment blijft gelijk, maar de richting verandert voortdurend. Omdat de verandering van het impulsmoment per tijdseenheid constant is, verwachten we dat het wiel een cirkelvormig pad zal gaan afleggen.

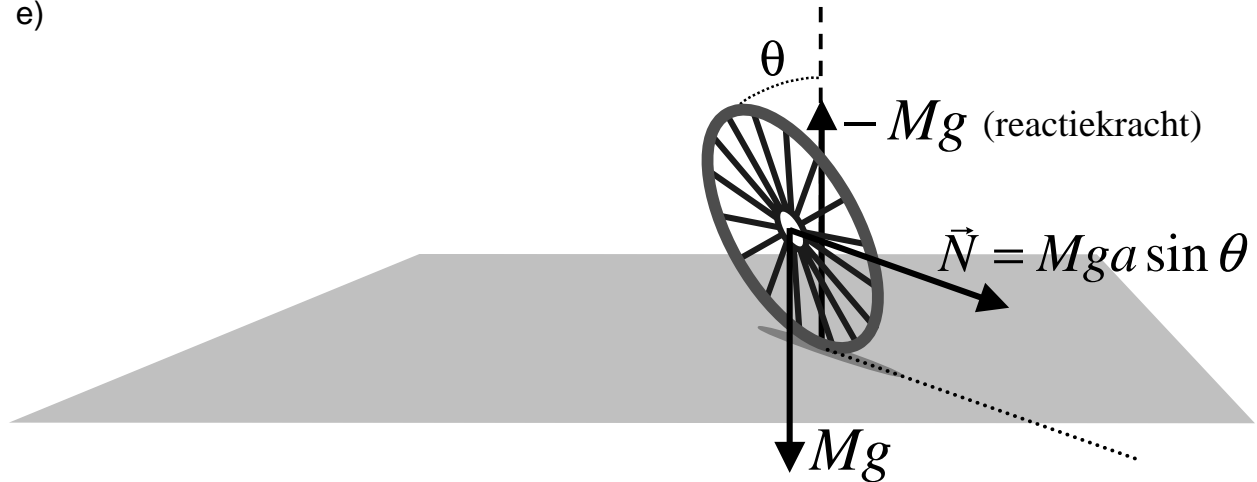


- b) Hiervoor leggen we het wiel in gedachten plat neer, met de draai-as langs de z-as. Het gevraagde traagheidsmoment is dan $I_{zz} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$. De twee delen waarover gesommeerd moet worden, zijn de rand en de as. Voor de as zijn de x- en y-coördinaten gelijk aan nul. Voor alle punten langs de rand is de som $x^2 + y^2$ gelijk aan a^2 . We vinden dus $I_{zz} = m_{rand} a^2$.
- c) Nu loopt de as, waarvoor we het traagheidsmoment willen bepalen, parallel aan bijvoorbeeld de x-as. Opnieuw hoeven we ons alleen te concentreren op de rand, omdat de rest van de massa in het centrum van het wiel geconcentreerd zit. Het eenvoudigst is om hier als integratievariabele de hoek te nemen tussen de as van het wiel en het punt op de rand.

$$I_{xx} = m_{rand} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a^2 \sin^2 \phi \cdot d\phi = \frac{1}{2} m_{rand} a^2.$$

- d) Zie tekening bij a) voor de richting. $L = I_{zz} \omega = m_{rand} a^2 \omega = m_{rand} a^2 \frac{v}{a} = m_{rand} a v$.

e)



- f) Alleen de horizontale component van \vec{L} varieert als gevolg van het krachtmoment; de verticale component blijft gelijk. De grootte van de horizontale component van \vec{L} bedraagt:

$$L_{hor} = L \cos \theta = m_{rand} a v \cos \theta$$

Omdat \vec{N} loodrecht staat op \vec{L}_{hor} , is de hoeksnelheid waarmee het impulsmoment precedeert t.g.v. $\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{L}}_{hor} = \vec{N}$ gelijk aan

$$\omega_p = \frac{\dot{\vec{L}}_{hor}}{\vec{L}_{hor}} = \frac{Mga \sin \theta}{m_{rand} a v \cos \theta} = \frac{m_{rand} + m_{as}}{m_{rand}} \frac{g}{v} \tan \theta.$$

- g) De impulsmomentvector draait dus met een constante hoeksnelheid. In combinatie met de constante rolsnelheid van het wiel, levert dit een cirkelvormige baan op voor het wiel op de ondergrond. Omdat het wiel niet slipt, geldt

$$\omega_p R = v,$$

waarbij R de straal is van de cirkel die het wiel op de ondergrond beschrijft. Hieruit volgt

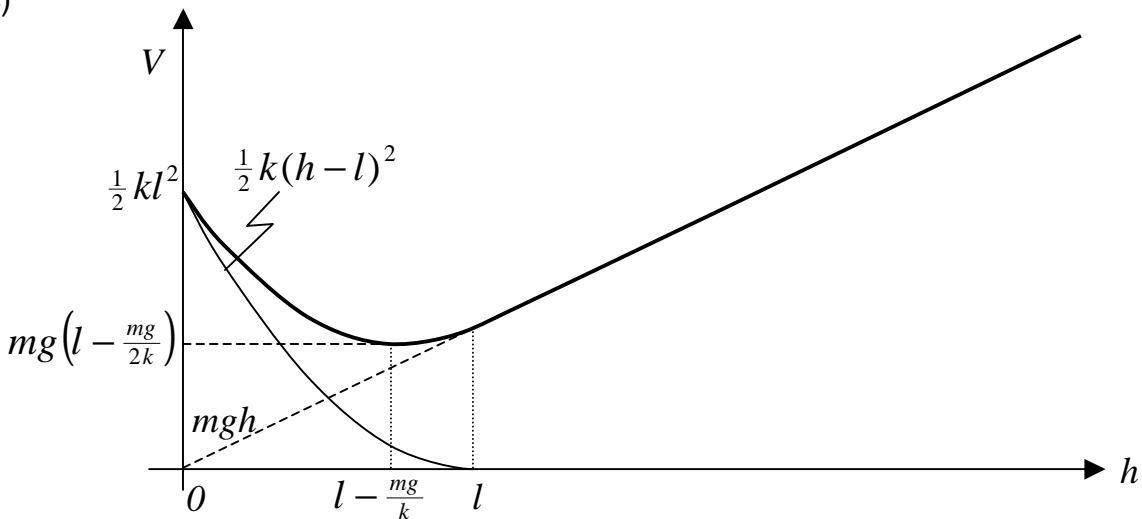
$$R = \frac{v}{\omega_p} = \frac{m_{rand}}{m_{rand} + m_{as}} \frac{v^2}{g \tan \theta}.$$

De gevraagde, maximale afstand bedraagt $2R$.

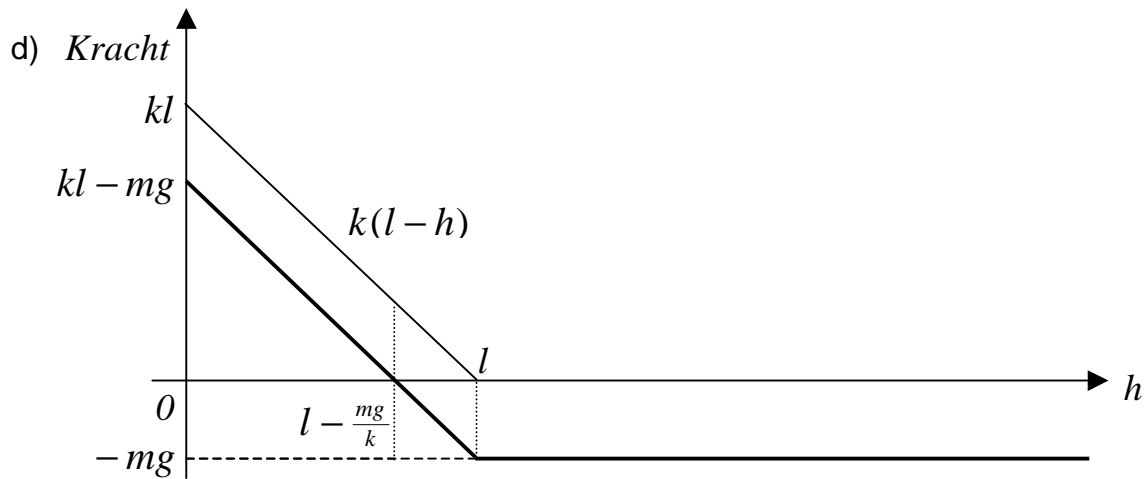
OPGAVE 2

- a) In de drie situaties zijn de krachten achtereenvolgens mg , mg en $\frac{1}{3}mg$. Een eenvoudige manier om dit te zien is om te eisen dat de energieverandering $mg\Delta h$ als gevolg van een hoogteverandering Δh van het blok telkens gelijk is aan de arbeid $F\Delta l$ die geleverd wordt bij het trekken aan het touw. Hierbij is F de kracht op het uiteinde van het touw en Δl de afstand waarover het uiteinde van het touw moet worden verplaatst ten opzichte van de vaste bodem. Bij de eerste twee situaties zien we dat $\Delta l = \Delta h$, zodat $F = mg$; bij de derde situatie vinden we $\Delta l = 3\Delta h$, zodat $F = \frac{1}{3}mg$. Een directere redenering, waarmee je echter sneller vergissingen begaakt, is dat het touw in de eerste twee situaties slechts enkelvoudig aan het blok bevestigd is, terwijl het in de laatste situatie drievoudig contact maakt met het blok (tweemaal via de katrol).
- b) Dezelfde redenering als bij a). Maar nu moet je de verplaatsing Δl van het uiteinde van het touw rekenen t.o.v. het blok. We vinden voor Δl achtereenvolgens $2\Delta h$, 0 , en $2\Delta h$. De krachten die hierbij horen zijn dan $\frac{1}{2}mg$, ∞ , en $\frac{1}{2}mg$. De waarde van ∞ voor de middelste situatie geeft aan dat het onmogelijk is in die configuratie het blok op te tillen door het touw omhoog te trekken terwijl je zelf op het blok staat. Het uiteinde van het touw verplaatst weliswaar t.o.v. de vast bodem, maar *niet* t.o.v. het blok zelf...

c)



In de grafiek komen geen discontinuïteiten voor. Ook de afgeleide is overal continu. De veer komt weliswaar 'plotseling' in contact met de bodem bij $h = l$, maar omdat de potentiële energie kwadratisch afhangt van de afstand tot dat contactpunt, levert dit geen discontinuë afgeleide op bij dit aansluitingspunt.



- e) Het blok komt tot stilstand op de hoogte $l - \frac{mg}{k}$. Op deze hoogte is de totale kracht (zwaartekracht + veerkracht) nul (zie d) en bevindt de potentiële energie zich op haar minimum (zie c). We hebben te maken met een eenvoudig massa-veer systeem, met een eigenfrequentie van $\frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}$.
- f) Door de toevoeging van het tweede blok, aan het andere uiteinde van het touw, verschuift het evenwichtspunt zich van $l - \frac{mg}{k}$ naar $l - \frac{mg}{2k}$. De veerconstante waarmee de veer rondom dit nieuwe evenwichtspunt reageert op uitwijkingen is nog steeds k . De totale massa die meedoet met de beweging is nu $\frac{3}{2}m$. De frequentie van de beweging wordt dus $\frac{1}{2\pi} \sqrt{2k/3m}$.
- g) De bewegingsvergelijking voor $h \leq l$ is:

$$m\ddot{h} = F + k(l - h) - mg \Leftrightarrow \ddot{s} = -\frac{k}{m}s, \text{ met } s \equiv h - l - \frac{F - mg}{k}.$$

De oplossing hiervan is:

$$s(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right), \text{ waarbij de amplitude en fasehoek bepaald worden door de}$$

begincondities, $h(0) = l - \frac{mg}{k}$ en $\dot{h}(0) = 0$. Invullen levert: $\alpha = 0$ en $A = -\frac{F}{k}$. Voor de hoogte vinden we dus:

$$h(t) = \frac{F}{k} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right] + l - \frac{mg}{k}.$$

Op deze manier bereikt het blok de hoogte $h = l$ op het tijdstip t^* , dat gegeven wordt door:

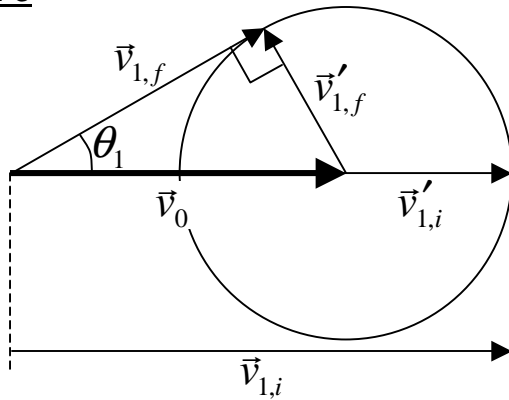
$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t^*\right) = 1 - \frac{mg}{F}. \text{ De snelheid bedraagt dan } \dot{h}(t^*) = \frac{g}{k} \sqrt{\frac{2F}{gm} - 1}.$$

Vanaf dat tijdstip, dus voor $t > t^*$, voert het blok een eenparig versnelde beweging uit met versnelling $\frac{F}{m} - g$. Hiervoor is de beschrijving:

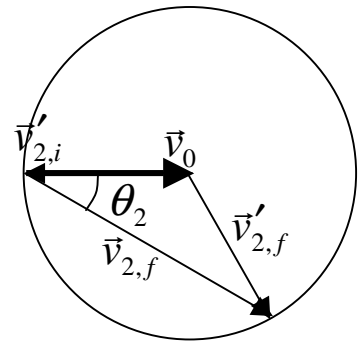
$$h(t) = l + (t - t^*)\dot{h}(t^*) + \frac{1}{2}(t - t^*)^2 \left(\frac{F}{m} - g \right).$$

OPGAVE 3

a)



projectiel



doelwit-deeltje

(let op: kleinere schaal!)

b) In de diagrammen bij a) is al de situatie getekend voor de maximale afbuighoek.

Omdat $v'_{1,f} = v'_{1,i}$ en $\frac{v'_{1,i}}{v_0} = \frac{m_2}{m_1}$, vinden we voor deze afbuighoek:

$$\sin \theta_1 = \frac{v'_{1,f}}{v_0} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{6}\pi.$$

Bij dit onderdeel is het tweede deel van de vraag niet door iedereen hetzelfde begrepen. Sommigen hebben de maximale hoek van het doelwit-deeltje uitgerekend, terwijl anderen de hoek van het doelwit-deeltje hebben uitgerekend bij een botsing waarbij het projectiel met de maximale hoek van $\theta_1 = \frac{1}{6}\pi$ wordt verstrooid. Beide antwoorden zijn goedgekeurd.

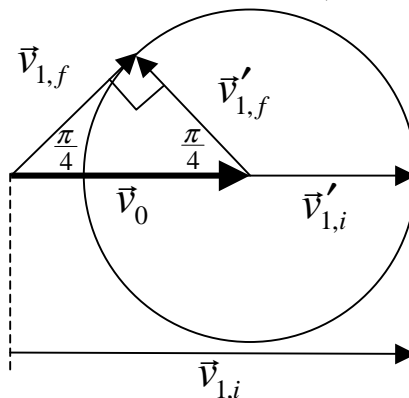
1^e mogelijkheid: $\theta_2 = \frac{1}{2}\pi$

2^e mogelijkheid: We weten dat in het CM-stelsel de vector $\vec{v}'_{2,f}$ precies tegengesteld gericht is aan $\vec{v}'_{1,f}$. Dat betekent dat de hoek die $\vec{v}'_{2,f}$ maakt met de positieve x-as gelijk is aan de hoek die $\vec{v}'_{1,f}$ maakt met de negatieve x-as. Deze laatste hoek is gelijk aan $\frac{1}{2}\pi - \theta_1$ (zie linker figuur bij a). De gevraagde hoek θ_2 in de gelijkbenige driehoek $\vec{v}_{2,f} - \vec{v}'_{2,f} - \vec{v}'_{2,i}$ is gelijk aan precies de helft hiervan:

$$\theta_2 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta_1 = \frac{1}{6}\pi.$$

c) In de figuur is de situatie getekend voor de gegeven maximale afbuighoek. Vanwege de gelijke hoeken van $\frac{1}{4}\pi$, zien we dat $v_0 = \sqrt{2} v'_{1,i}$. Hieruit leiden we meteen af dat

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v'_{1,i}}{v_0} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$



- d) Vanwege het verlies van de helft van de kinetische energie in het massamiddelpuntstelsel, zijn de eindsnelheden in dat systeem gereduceerd met een factor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Daarmee vinden we als alternatieve oplossing voor de hoeken bij onderdeel b):

$$\sin \theta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_1 = \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.36 \text{ rad.}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_2 = \frac{1}{4}\pi \text{ (1}^{\text{e}} \text{ mogelijkheid; zie bij b) en}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta_1 \approx 0.60 \text{ rad (2}^{\text{e}} \text{ mogelijkheid).}$$

Voor de alternatieve oplossing bij onderdeel c) gebruiken we dat nu:

$$v_0 = \sqrt{2} v'_{1,i} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = v'_{1,i} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{v'_{1,i}}{v_0} = 1$$

- e) Zoals we bij c) en d) gezien hebben, krijgen we de maximale afbuighoek van $\frac{1}{4}\pi$ voor een verhouding tussen de snelheid v_0 van het massamiddelpunt en de snelheid $v'_{1,f}$ van het projectiel binnen het mm-systeem van $\sqrt{2}$. Ook in het geval van massa-overdracht is v_0 even groot. Kennelijk is dus $v'_{1,f}$ nu een factor $\sqrt{2}$ groter dan in het geval zonder massa-overdracht, $v'_{1,f} = \sqrt{2} v'_{1,f}$. Voor het uitrekenen van de massaoverdracht Δm maken we gebruik van het feit dat de totale impuls binnen het mm-systeem nul is, zowel in het geval met massa-overdracht, $\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*$, als zonder, $\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$. Verder maken we gebruik van het feit dat de totale hoeveelheid kinetische energie binnen het mm-systeem in beide gevallen precies even groot moet zijn:

$$\frac{p_1^{*2}}{2m_1^*} + \frac{p_2^{*2}}{2m_2^*} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_1}.$$

Verder weten we dat:

$m_1^* = m_1 + \Delta m$ en $m_2^* = m_2 - \Delta m$, terwijl $m_1 = m$ en $m_2 = \frac{1}{2}m$. Invullen en uitwerken levert als oplossing:

$$\Delta m = -\frac{1}{4}m.$$

Het projectiel verliest dus een vierde van zijn massa aan het doelwit-deeltje.