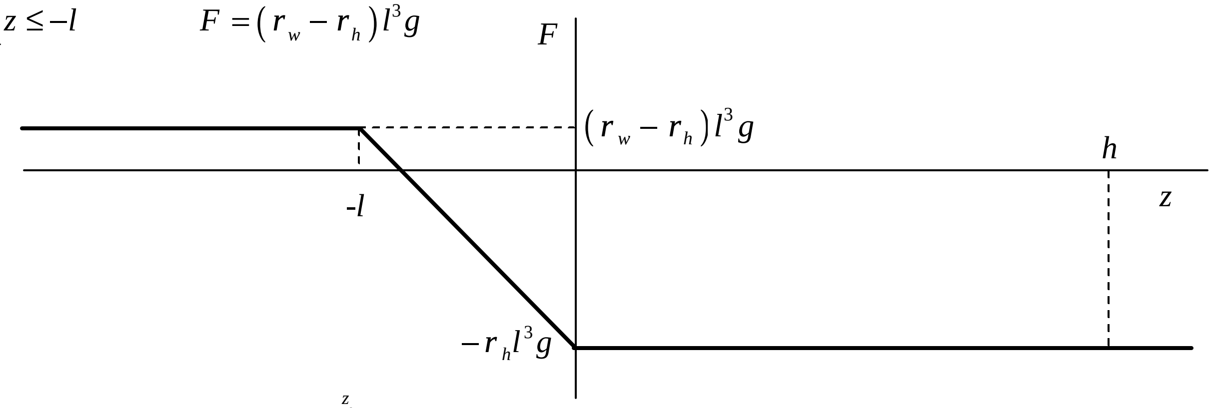
Uitwerking Hertentamen Klassieke Mechanica I
Dinsdag 30 juli 2002

OPGAVE 1

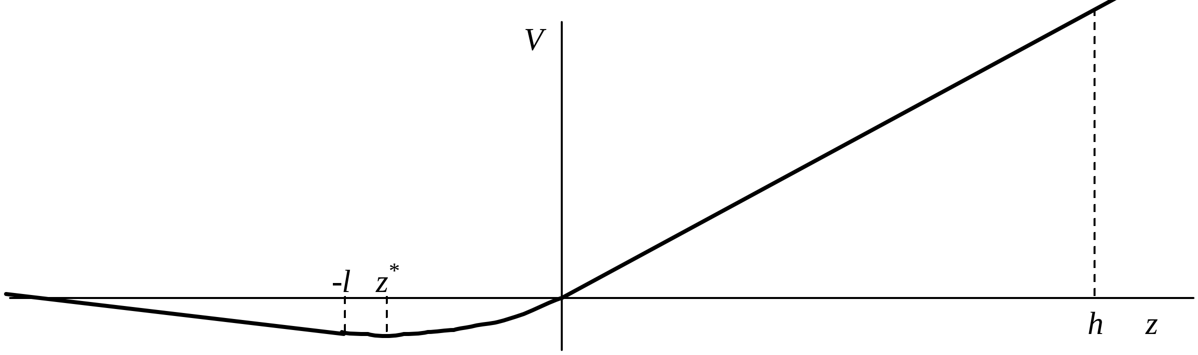
a) Het eerste deel van de beweging, vanaf hoogte h tot hoogte nul, is een eenparig versnelde vrije val. Hierna ondervindt het blok naast de constante zwaartekracht een opwaartse kracht die op het traject van hoogte nul tot hoogte $-l$ lineair toeneemt met de verplaatsing. De bijbehorende beweging is die van een harmonische oscillator. Als het blok eenmaal volledig is ondergedompeld, ondervindt het weer een constante totaalkracht. Omdat de dichtheid van het water groter is dan die van het hout, is deze kracht naar boven gericht. Het blok beweegt dus weer eenparig versneld, en wel zo dat het op zekere diepte tot stilstand zal komen. Vanaf dat punt speelt het volledige, zojuist beschreven scenario zich in omgekeerde volgorde weer af. Het blok komt dus op een hoogte h boven het wateroppervlak opnieuw tot stilstand. Deze cyclus zal zich, vanwege het ontbreken van wrijving, blijven herhalen.

b) $$\begin{cases} z \geq 0 & F = -mg = -\rho_h l^3 g \\ -l < z < 0 & F = -\rho_w l^2 zg - mg = -(\rho_w z + \rho_h l) l^2 g \\ z \leq -l & F = (\rho_w - \rho_h) l^3 g \end{cases}$$



c) We gebruiken $V(z) = -\int_{z_0}^{z} F(z')dz'$, en kiezen als (willekeurige) referentiehoogte $z_0 = 0$. We vinden dan: $$\begin{cases} z \geq 0 & V = \rho_h l^3 gz \\ -l < z < 0 & V = (\tfrac{1}{2}\rho_w z + \rho_h l) l^2 gz \\ z \leq -l & V = -\tfrac{1}{2}\rho_w l^4 g - (\rho_w - \rho_h) l^3 gz \end{cases}$$

Merk op dat het resultaat voor $z \leq -l$ verkregen wordt door eerst van nul naar $-l$ te integreren, en daarbij vervolgens de integraal van $-l$ naar z op te tellen.



d) Gebruik de bij b) bepaalde krachten in combinatie met $F = m\ddot{z}$. Op het traject van $z = h$ naar $z = 0$ valt het blok eenparig versneld (beginsnelheid nul), met zwaartekrachtsversnelling $-g$. Dit levert de volgende vergelijking voor dat traject:

$\boxed{z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \text{ voor } 0 \le t \le t_1}$, waarbij $t_1 = \sqrt{2h/g}$ het moment is waarop het blok het water raakt, $z = 0$. De snelheid bedraagt dan $v_1 = -\sqrt{2gh}$.

Op het traject van $z = 0$ naar $z = -l$ vinden we (herschrijf b):

$\ddot{z} = -\dfrac{g}{|z^*|}\left(z - z^*\right)$, waarbij $z^* = -\dfrac{r_h}{r_w} l = -\frac{1}{2}l$ de evenwichtshoogte van het drijvende blok voorstelt (zie figuur). De algemene oplossing voor dit deel van de beweging is $z(t) - z^* = A\cos\left[w(t - t_1) + a\right]$, waarbij de hoeksnelheid $w = \sqrt{\dfrac{g}{|z^*|}} = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}$, en waarbij de amplitude A en fasehoek a nog moeten worden bepaald uit de randvoorwaarden dat $z = 0$ en $v = v_1$ op tijdstip t_1. Hieruit volgt dat $a = \arctan p$, waarbij $p = \dfrac{v_1}{wz^*} = 2\sqrt{\dfrac{h}{l}}$, en $A = |z^*|\sqrt{1 + p^2} = \frac{1}{2}l\sqrt{1 + p^2}$. Dit levert de volgende vergelijking voor het tweede traject:

$\boxed{z(t) = -\frac{1}{2}l\left[1 + \sqrt{1 + p^2}\cos\left(wt + \arctan p - p\right)\right] \text{ voor } t_1 < t < t_2}$ waarbij $t_2 = t_1 + \dfrac{p - 2\arctan p}{w}$ het tijdstip is waarop het blok juist geheel ondergedompeld is, $z = -l$. In het argument van de cosinus hebben we gebruikt dat $wt_1 = p$. Om het tijdstip t_2 te bepalen hebben we gebruikt dat dit gedeelte van de beweging volledig symmetrisch verloopt t.o.v. het evenwichtspunt $z^* = -\frac{1}{2}l$, dat, vanwege $r_h = \frac{1}{2}r_w$, precies in het midden ligt tussen $z = 0$ en $z = -l$, zodat de tijd $t_2 - t_1$ tweemaal de tijd is vanaf $z = 0$ naar z^*. Met hetzelfde symmetrie-argument vinden we dat de snelheid op tijdstip t_2 gelijk is aan die op t_1, dus $v_2 = -\sqrt{2gh}$.

Het laatste traject is weer eenparig versneld, en de versnelling is, opnieuw vanwege $r_h = \frac{1}{2}r_w$, gelijk aan $+g$, zodat de beweging beschreven wordt door:

$\boxed{z(t) = -l + v_2\left(t - t_2\right) + \frac{1}{2}g\left(t - t_2\right)^2 \text{ voor } t_2 \le t \le t_3}$, waarbij $t_3 = t_2 + 2\sqrt{2h/g}$. Precies halverwege in dat traject, op $t_{omkeer} = t_2 + \sqrt{2h/g}$, staat het blok stil op hoogte $z = -l - h$.

Samenvattend concluderen we dat het blok, voor het hier behandelde, speciale geval $r_h = \frac{1}{2}r_w$, een periodieke beweging uitvoert rondom het evenwichtspunt $z^* = -\frac{1}{2}l$. Het middelste gedeelte, $-l < z < 0$, verloopt als een harmonische oscillator met hoeksnelheid $\sqrt{2g/l}$, terwijl de gedeelten daarbuiten, $z \le -l$ en $z \ge 0$, eenparig versneld worden doorlopen, met versnellingen van respectievelijk $+g$ en $-g$. De totale periode van deze anharmonische oscillatiebeweging bedraagt:

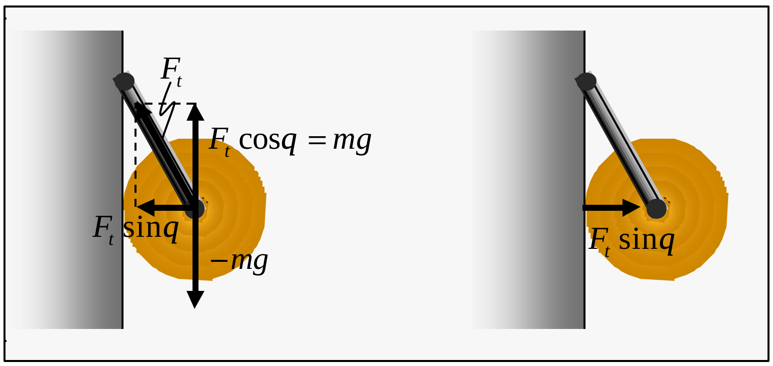
$$T = 2t_{omkeer} = 2\left(\frac{p - 2\arctan p}{w}\right) + 4\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

e) Als het water wel wrijving veroorzaakt, dan wordt de periodieke beweging van d) gedempt. De oscillatie-amplitude zal afnemen, en in de limiet van $t \to \infty$ komt het blok tot stilstand op de evenwichtshoogte z^*.

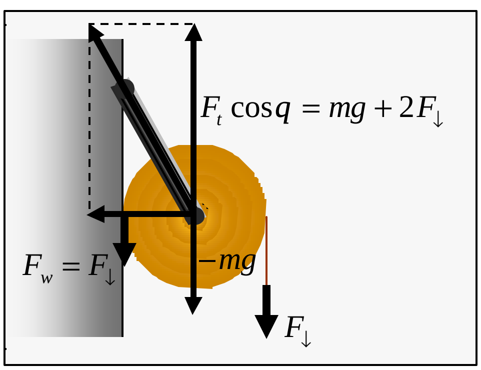
OPGAVE 2

a) $I = \int_0^R r\, lr^2 2p\, r dr = \tfrac{1}{2} p\, r\, lR^4 = \tfrac{1}{2}\left(p r\, lR^2\right) R^2 = \tfrac{1}{2} mR^2$. Hierin zijn onderweg de lengte van de rol l en de dichtheid r gebruikt.

b) Omdat de beugel om zijn ophangpunt scharniert, kan deze op de rol uitsluitend een kracht overbrengen in zijn eigen lengterichting. De verticale component van deze kracht is in grootte gelijk aan de zwaartekracht op de rol, $F_t \cos q = mg$, zodat $F_t = mg/\cos q$. De rol wordt daarom met een kracht $F_t \sin q = mg \tan q$ tegen de muur getrokken. De muur oefent op de rol een even grote, maar tegengesteld gerichte reactiekracht uit.



c) De rol draait niet. Dat impliceert dat het totale krachtmoment op de rol gelijk is aan nul. Beschouw het krachtmoment t.o.v. het centrum van de rol. Dit bedraagt $t = \left(F_\downarrow - F_w\right)R$, waarbij F_w de naar beneden gerichte wrijvingskracht is, die de rol van de muur ondervindt. Uit de eis dat dit krachtmoment nul is leiden we af dat $F_w = F_\downarrow$. De verticale component van de door de beugel uitgeoefende trekkracht is in grootte gelijk aan de som van alle neerwaartse krachten, $F_t \cos q = mg + F_\downarrow + F_w = mg + 2F_\downarrow$, zodat $F_t = \left(mg + 2F_\downarrow\right)/\cos q$. De rol wordt daarom tegen de muur gedrukt met een horizontale kracht $F_t \sin q = \left(mg + 2F_\downarrow\right)\tan q$. De reactiekracht van de muur op de rol is uiteraard weer even groot, maar tegengesteld gericht. De totale kracht van de muur op de rol is de (vector)som van deze horizontale reactiekracht, en de naar beneden gerichte wrijvingskracht $F_w = F_\downarrow$.



d) De maximale wrijvingskracht is gelijk aan $F_w^{\max} = \mu F_t \sin\theta$. Als de neerwaartse trekkracht $F_\downarrow$ groter is dan deze wrijvingskracht, bedraagt de totale neerwaartse kracht $mg + F_\downarrow + F_w^{\max} = mg + F_\downarrow + \mu F_t \sin\theta$. Deze wordt opnieuw gecompenseerd door de verticale component van de door de beugel uitgeoefende trekkracht. Dus $F_t \cos\theta = mg + F_\downarrow + \mu F_t \sin\theta$. Hieruit volgt voor de door de beugel uitgeoefende trekkracht:

$$F_t = \frac{mg + F_\downarrow}{\cos\theta - \mu\sin\theta}.$$

De horizontale kracht (rol? muur) bedraagt dan $F_t \sin\theta = \dfrac{mg + F_\downarrow}{\cot\theta - \mu}$. De totale kracht van de muur op de rol is de (vector)som van deze horizontale reactiekracht en de naar beneden gerichte wrijvingskracht $F_w^{\max} = \mu F_t \sin\theta$.

e) Voor de minimale, neerwaartse trekkracht waarbij de rol juist gaat draaien geldt $F_\downarrow^{\min} = \mu F_t \sin\theta$. Invullen in de bij d) gevonden uitdrukking en elimineren van F_t levert dan $F_\downarrow^{\min} = \mu mg \big/ \left(\cot\theta - 2\mu\right)$.

f) Omdat alle krachten constant zijn, is ook het krachtmoment constant, en omdat $F_\downarrow > F_\downarrow^{\min}$, is het krachtmoment ongelijk aan nul. Omdat de rol niet afneemt in massa en diameter, blijft ook het traagheidsmoment constant. Daarom zal de rol eenparig versneld gaan roteren. De hoekversnelling $\alpha = \dot\omega$ van de rol vinden we m.b.v. $I\dot\omega = \tau$. Gebruik de bij d) uitgerekende horizontaalkracht en het bij a) berekende traagheidsmoment. De grootte van het krachtmoment bedraagt $\tau = \left(F_\downarrow - F_w\right) R = \left(F_\downarrow - \mu \dfrac{mg + F_\downarrow}{\cot\theta - \mu}\right) R$. Voor de hoekversnelling vinden we $\alpha = \dfrac{2}{mR}\left(F_\downarrow - \mu\dfrac{mg + F_\downarrow}{\cot\theta - \mu}\right)$, hetgeen equivalent is met $\alpha = \dfrac{2}{mR}\dfrac{1 - 2\mu\tan\theta}{1 - \mu\tan\theta}\left(F_\downarrow - F_\downarrow^{\min}\right)$.

<u>OPGAVE 3</u>

a) De energie is precies gelijk voor beide banen. De totale energie hangt alleen af van de lengte van de lange as van de baan:

$$a = \frac{|\alpha|}{2|E|},$$

met $\alpha = -G m_{satelliet} M_{aarde}$. Deze lange as is juist gelijk voor beide banen. Ook de omlooptijd is gelijk voor beide banen. Deze hangt opnieuw alleen af van de lengte van de lange as:

$$\tau = \sqrt{4\pi^2 a^3 m / |\alpha|}.$$

Het impulsmoment is het grootst voor de cirkelbaan, want deze hangt ook af van de lengte van de korte as van de baan:

$$b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Bij de cirkelbaan staat de aarde in het midden. Bij de ellips staat de aarde in een van de twee brandpunten. De satelliet kan de aarde in de ellipsbaan veel dichter naderen, en heeft op het punt van dichtste nadering een veel hogere snelheid dan in de cirkelbaan. In het punt met de grootste afstand is de snelheid in de ellipsbaan juist veel lager.

b) De potentiële energie van de shuttle in het zwaartekrachtsveld van de aarde (t.o.v. een punt oneindig ver weg van de aarde) wordt gegeven door:

$$V(R) = \frac{a}{R}.$$

Op aarde heeft de shuttle nog geen kinetische energie. Dus bedraagt de totale energie van de shuttle vóór de lancering

$$E(R_E) = K + V(R_E) = V(R_E) = \frac{a}{R_E},$$

waarbij R_E = 6400 km de straal is van de aarde. Als de shuttle in een stabiele baan zit geldt:

$$E(R) = K(R) + V(R) = \tfrac{1}{2}V(R) = \frac{a}{2R}.$$

De energie die nodig is om de shuttle vanuit stilstand op aarde naar een stabiele baan met een straal van R = 6400+400 km te brengen bedraagt dus

$$\Delta E = E(R) - E(R_E) = a\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R_E}\right).$$

Als de shuttle in plaats daarvan naar een straal R' = 6400+400-11 km wordt gebracht, kost dit:

$$\Delta E' = E(R') - E(R_E) = a\left(\frac{1}{2R'} - \frac{1}{R_E}\right).$$

De gevraagde fractie (brandstofverlies, dus vermindering in verbruikte energie) is dus

$$f = 1 - \frac{\Delta E'}{\Delta E} = 1 - \left(\frac{1}{2R'} - \frac{1}{R_E}\right) \Big/ \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R_E}\right) = 1.44 \cdot 10^{-3}.$$

c) We gaan uit (zie b) van de totale energie op aarde (in stilstand):

$$E(R_E) = \frac{a}{R_E}.$$

De ontsnappingsenergie is de energie die we moeten toevoeren om de totale energie naar de waarde nul te verhogen:

$$E_{ontsnap} = -\frac{a}{R_E}.$$

Om de stabiele baan op 6800 km hoogte te bereiken is een energie nodig geweest van (zie b):

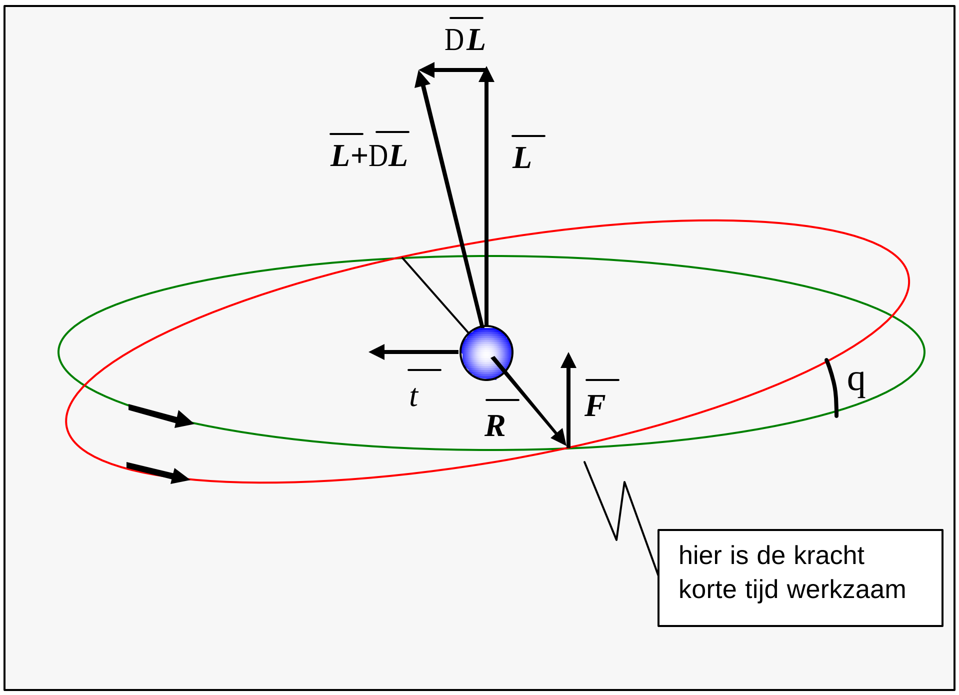
$$\Delta E = E(R) - E(R_E) = a\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R_E}\right).$$

Dit is een fractie

$$a\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R_E}\right) \Big/ \left(-\frac{a}{R_E}\right) = 1 - \frac{R_E}{2R} = 0.53$$

van de ontsnappingsenergie.

d) De kort werkende kracht levert een kort werkzaam krachtmoment, waardoor het impulsmoment bij benadering (zie tip 1) in één keer verandert.



T.o.v. het kantelpunt van de baan, het centrum van de aarde, bedraagt de grootte van de verandering in impulsmoment die hierdoor wordt veroorzaakt:

$\left|\Delta\vec{L}\right| = \int_0^t t\, dt' = \int_0^t FR dt' = FRt$. (vectortekens weggelaten, F en R staan loodrecht op elkaar).

De grootte van het impulsmoment vóór de verandering bedraagt:

$$\left|\vec{L}\right| = mvR = R\sqrt{2mK} = R\sqrt{m|a|/R} = \sqrt{m|a|R}\ .$$

De waarde van a vinden we uit de zwaartekrachtsversnelling op aarde: $mg = |a|/R_E^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{L}\right| = \sqrt{m^2 g R_E^2 R} = mR_E\sqrt{gR}$

De impulsmomentverandering $\Delta\vec{L}$ staat loodrecht op $\vec{L}$, en de resulterende hoekverdraaiing volgt uit

$$\tan(q) = \frac{\left|\Delta\vec{L}\right|}{\left|\vec{L}\right|} = \frac{Ft}{mR_E}\sqrt{\frac{R}{g}} = 1.3\times10^{-4} \quad \Rightarrow \quad q = 0.0075^\circ .$$