Uitwerking Tentamen Klassieke Mechanica I
Maandag 3 juni 2002

OPGAVE 1

a) Het volledige gewicht van het blok werkt op het touw, zodat de spankracht gelijk moet zijn aan mg. Deze kracht werkt ook op de veer, die daardoor is uitgerekt met een bedrag $\Delta l = mg/k$ ten opzichte van zijn eigen evenwichtslengte.

b) Het blok hangt nu aan twee uiteinden van het touw. In de nieuwe evenwichtspositie bedraagt de spankracht in het touw daarom nog maar $\frac{1}{2}mg$. De uitrekking van de veer in de nieuwe evenwichtspositie is daardoor ook gehalveerd tot $\Delta l' = mg/2k$. De nieuwe evenwichtshoogte wordt daardoor hoger dan de oorspronkelijke evenwichtshoogte h_0 met een hoeveelheid $mg/4k$, dus $h_0' = h_0 + mg/4k$.

c) $V(x) = mgx + \frac{1}{2}k\left[2\left(x - \frac{mg}{4k}\right)\right]^2 + const. = 2kx^2$, waarbij $x = h - h_0'$ de uitwijking is t.o.v. de nieuwe evenwichtspositie, en waarbij de constante bijdrage zodanig gekozen is dat de potentiële energie nul is voor de nieuwe evenwichtspositie, $x = 0$. Naast de zwaartekrachtsterm treedt de parabolische bijdrage op van de veer. De extra factor 2 komt erbij vanwege het feit dat de lengteverandering van de veer gelijk is aan (minus) tweemaal de hoogteverandering het blok. We hadden ook meteen zowel de lineaire bijdrage mgx kunnen weglaten als de term $\frac{mg}{4k}$ binnen het kwadraat, omdat $x = 0$ de evenwichtspositie is waar de zwaartekracht en de voorspanning van de veer tegen elkaar wegvallen.

d) $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -4kx$. De veer trekt dus effectief *vier*maal zo sterk aan het blok als anders. Hieruit volgt: $m\ddot{x} = -4kx$.

e) Algemene oplossing: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, met $\omega = 2\sqrt{k/m}$. De beginsnelheid is nul, zodat $B = 0$. De beginuitwijking t.o.v. h_0' bedraagt $-mg/4k$, zodat
$$x(t) = -\frac{mg}{4k}\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

f) $k' = 2k$. Bij dezelfde hoogteverandering van het blok reageert elk van de veren nu met de helft van de lengteverandering die voorheen door één veer werd vertoond. Om hierbij dezelfde kracht op te wekken als die enkele veer moet de veerconstante tweemaal zo groot zijn (vergelijk met het in serie schakelen van condensatoren).

OPGAVE 2

a) Omdat de twee ionen ten opzichte van elkaar op oneindige afstand een positieve kinetische energie hebben, en omdat ze met elkaar wisselwerken via een α/r potentiaal, doorlopen ze ten opzichte van elkaar een open baan met de vorm van een hyperbool.

b) De grootte van het impulsmoment van het natriumion t.o.v. het chloorion bedraagt $L_{lab} = |\vec{r} \times \vec{p}| = d\sqrt{2m_{Na}K_i}$.

c) De effectieve massa van de twee ionen is $\mu = \frac{m_{Na}m_{Cl}}{m_{Na} + m_{Cl}}$. Het impulsmoment in het massamiddelpuntsysteem is $L_{mm} = |\vec{r} \times \vec{p}_{mm}| = |\vec{r} \times \mu\vec{v}_i| = d\mu v_i$, waarbij $\vec{v}_i$ de initiële relatieve snelheid is, gelijk aan de initiële snelheid van het natriumion in het lab.systeem. Dit resultaat kan ook worden afgeleid door de snelheden van de twee ionen binnen het massamiddelpuntsysteem te bepalen alsmede de aandelen d_{Na} en d_{Cl} van de botsingsparameter d .

d) Voor het massamiddelpuntsysteem geldt in de radiële richting:

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L_{mm}^2}{2\mu r^2} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{L_{mm}^2}{2\mu r^2}$$

De radiële bewegingsvergelijking binnen het massamiddelpuntsysteem wordt:

$$\mu\ddot{r} = F_{eff}(r) = F(r) + \frac{L_{mm}^2}{\mu r^3} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{L_{mm}^2}{\mu r^3}$$

e) Op de afstand van dichtste nadering is de volledige kinetische energie binnen het massamiddelpunt omgezet in effectieve potentiële energie, zodat $V_{eff}(r_{\min}) = \frac{1}{2}\mu v_i^2$, ofwel $-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}} + \frac{L_{mm}^2}{2\mu r_{\min}^2} = \frac{1}{2}\mu v_i^2$. Hieruit volgt $r_{\min} = \sqrt{d^2 + C^2} - C$, waarbij $C = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu v_i^2}$.

De relatieve snelheid op deze afstand volgt uit het behoud van impulsmoment. Dus op de afstand van dichtste nadering vinden we voor deze (maximale) relatieve snelheid $r_{\min}\mu v_{\max} = L_{mm} = d\mu v_i$, waaruit volgt dat $v_{\max} = \frac{d}{r_{\min}} v_i$.

f) Bij de inelastische ontmoeting tussen de ionen blijven de totale impuls en het totale impulsmoment behouden. De energie is niet behouden.

g) Zie f): Het nieuw gevormde molecuul voert twee gelijktijdige bewegingen uit, namelijk (1) de eenparige translatiebeweging van het massamiddelpunt en (2) een rotatie met constante hoeksnelheid rond het massamiddelpunt.

(1) Impulsbehoud in het lab.stelsel: snelheid $v_{mm} = \frac{m_{Na}}{m_{Na} + m_{Cl}} v_i$.

(2) Impulsmomentbehoud in het mm.stelsel:

hoeksnelheid $\omega = \frac{v_{rot}}{d_{NaCl}} = \frac{d_{NaCl}\mu v_{rot}}{d_{NaCl}^2 \mu} = \frac{L_{mm}}{d_{NaCl}^2 \mu} = \frac{d v_i}{d_{NaCl}^2}$

OPGAVE 3

a) $I_z^{\bigcirc} = \sigma \int_0^r x^2 \cdot 2\pi x dx = \frac{1}{2}\pi\sigma r^4 = \frac{1}{2}mr^2$.

b) Gebruik het loodrechte-as theorema: $I_x^{\bigcirc} = \frac{1}{2} I_z^{\bigcirc} = \frac{1}{4}mr^2$.

c) We volgen nu de omgekeerde volgorde en rekenen eerst het traagheidsmoment uit t.o.v. een as die parallel aan de tafel loopt, door het middelpunt, en parallel aan een van de zijden: $I_x^{\square} = \sigma \cdot 2a \int_0^{a/2} x^2 dx = \frac{1}{12}\sigma a^4 = \frac{1}{12}ma^2$. Gebruik nu het loodrechte-as theorema: $I_z^{\square} = 2I_x^{\square} = \frac{1}{6}ma^2$. Om dit resultaat met dat bij a) te vergelijken drukken we r in a uit: $\pi r^2 = a^2$. We vinden $\frac{I_z^{\bigcirc}}{I_z^{\square}} = \frac{3}{\pi} < 1$.

d) Gebruik nu het parallelle-as theorema:
$I_{rand}^{\bigcirc} = I_x^{\bigcirc} + mr^2 = \frac{5}{4}mr^2$, en $I_{rand}^{\square} = I_x^{\square} + m\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{3}ma^2$. Dus nu: $\frac{I_{rand}^{\bigcirc}}{I_{rand}^{\square}} = \frac{15}{4\pi} > 1$.

e) De rotatieas wordt nu bepaald door de lijn door de twee punten waar de overgebleven poten de grond raken. Gebruik het parallelle-as theorema t.o.v. het resultaat bij c) om het traagheidsmoment rondom deze lijn te krijgen: $I_{poten}^{\square} = I_x^{\square} + m\left[\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2\right] = \frac{4}{3}ma^2$. De hoekversnelling volgt uit $I_{poten}^{\square}\dot{\omega} = \tau = mg \cdot \frac{1}{2}a$, zodat $\dot{\omega} = \frac{3g}{8a}$.

f) Tijdens de val moeten we er rekening mee houden dat het krachtmoment steeds groter wordt: $\tau = mga(\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta)$. Hieruit volgt dat $\dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{3g}{4a}(\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta)$. Deze vergelijking laat zich niet analytisch oplossen.

g) Als we de beweging beschrijven als een rotatie rondom de lijn door de twee punten waar de overgebleven poten de grond raken, is de totale kinetische energie gelijk aan de rotatie-energie van het tafelblad $K_{tot} = K_{rot} = \frac{1}{2}I_{poten}^{\square}\omega^2$. Hieruit volgt voor het tempo van de toename van de totale kinetische energie: $\dot{K}_{tot} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I_{poten}^{\square}\omega^2\right) = I_{poten}^{\square}\omega\dot{\omega}$. Op het startmoment geldt $\omega = 0$, zodat het initiële tempo van kinetische energietoename gelijk is aan nul. Dit resultaat is analoog aan dat voor een eenparig versnelde translatiebeweging vanuit stilstand. Het door het versnelde voorwerp opgenomen vermogen is dan gelijk aan de op dat voorwerp werkende kracht vermenigvuldigd met de afstand waarover het aangrijpingspunt van die kracht zich per seconde verplaatst. Omdat de beginsnelheid nul is, is het initiële vermogen nul. Evenzo hier voor de (aanvankelijk) eenparig versnelde rotatie-beweging. Het opgenomen vermogen is gelijk aan het product van het krachtmoment en de hoeksnelheid, en de initiële hoeksnelheid is nul.