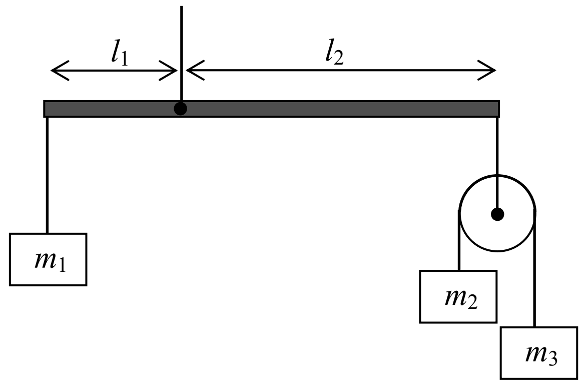
**Uitwerking Hertentamen Klassieke Mechanica I**
**Dinsdag 29 juli 2003**

OPGAVE 1




a) Massa's $m_2$ en $m_3$ voeren een eenparig versnelde beweging uit. De reden hiervoor is dat het verschil in de zwaartekracht op $m_2$ en die op $m_3$ een constante verschilkracht oplevert die de combinatie van de twee massa's $m_2 + m_3$ in beweging zet. Dit resulteert in een constante versnelling en dus een eenparig versnelde beweging.

b) De bij (a) genoemde verschilkracht bedraagt $m_3 g - m_2 g = (m_3 - m_2) g$. Als gevolg hiervan zal de combinatie $m_2 + m_3$ versneld worden met een versnelling $a_{2+3} = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} g$. Een 'nettere' manier om tot dit resultaat te komen is te eisen dat de spankracht $T$ in het koord op beide massa's gelijk moet zijn. Hieruit volgt direct de versnelling van beide massa's t.o.v. de katrol. De eenparig versnelde beweging van de twee massa's start vanuit stilstand op tijdstip $t = 0$. Dit levert een snelheid op ter grootte $a_{2+3} t = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} g t$. Voor $m_3$ is deze snelheid naar beneden gericht, en voor $m_2$ naar boven.

c) De kracht die door de katrol via het koord op massa $m_2$ geleverd moet worden om deze massa met de bij (b) berekende versnelling te laten bewegen bedraagt $F_2 = m_2 \left( g + a_{2+3} \right)$; deze kracht is naar boven gericht. Op dezelfde manier vinden we dat de katrol op massa $m_3$ een kracht moet uitoefenen van $F_3 = m_3 \left( g - a_{2+3} \right)$, opnieuw naar boven gericht. De totaalkracht die de katrol op de twee massa's uitoefent is dus

$$F_{2+3} = m_2 \left( g + a_{2+3} \right) + m_3 \left( g - a_{2+3} \right) = m_2 g \left( 1 + \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} \right) + m_3 g \left( 1 - \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} \right) = 4 \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} g .$$

(merk op dat de door beide massa's uitgeoefende krachten gelijk zijn aan elkaar – uiteraard zijn ze gelijk aan de spankracht; merk verder op dat de combinatie van massa's in het eindresultaat de gereduceerde massa is van de combinatie van $m_2$ en $m_3$: $F_{2+3} = 4 \mu g$ ).

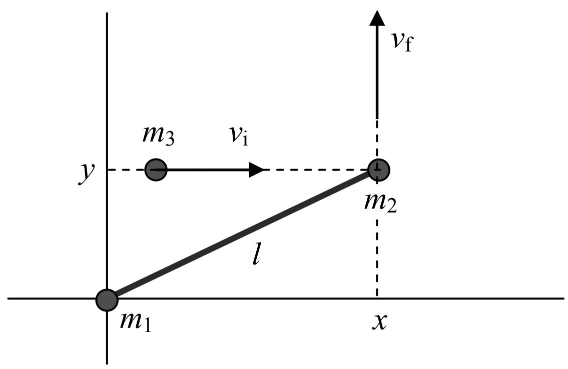
De twee massa's oefenen uiteraard samen op de katrol een even grote kracht uit, maar dan naar beneden gericht.

d) De balk blijft in evenwicht als het totale krachtmoment op de balk nul is. We rekenen t.o.v. het ophangpunt van de balk. We vinden dan dat

$$m_1 g l_1 = F_{2+3} l_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 l_1 = 4\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{l_1}{l_2} = 4\frac{m_2 m_3}{m_1\left(m_2 + m_3\right)}$$

e) De onderliggende vraag is of er iets verandert aan de beweging van massa's $m_2$ en $m_3$ t.o.v. de katrol. Het antwoord daarop vinden we door te eisen dat de spankracht ook in dit geval gelijk is aan beide kanten. Daaruit volgt dat de nu optredende versnelling van de massa's t.o.v. de katrol gelijk is aan $a'_{2+3} = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2}\left(g + a\right)$. Ook de door massa $m_1$ op de balk uitgeoefende kracht is groter geworden: $F_1' = m_1\left(g + a\right)$. We zien dat alle krachten die de balk ondervindt vergroot zijn met dezelfde factor. Dat betekent dat, als de balk oorspronkelijk in evenwicht was, ook in geval van de opwaartse versnelling het evenwicht behouden blijft. Het systeem gedraagt zich domweg alsof we de zwaartekrachtsversnelling hebben vergroot van $g$ naar $g + a$.

OPGAVE 2




a) We vinden de afstanden tot het massamiddelpunt via $m_1 l_1 = m_2 l_2 = m_2\left(l - l_1\right)$

$$\Rightarrow \quad l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \quad \text{en} \quad l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l .$$

b) Het traagheidsmoment van de halter bedraagt:

(i) $I_1 = m_2 l^2$ t.o.v. de positie van massa $m_1$,

(ii) $I_2 = m_1 l^2$ t.o.v. massa $m_2$, en

(iii) $I_{mmp} = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 = \mu l^2$ t.o.v. het bij (a) berekende massamiddelpunt.

(hierbij is $\mu$ de gereduceerde massa van de twee massa's in de halter).

c) De beweging van de halter na de botsing zal een combinatie zijn van een eenparige translatie (vanwege impulsoverdracht) en een eenparige rotatie (vanwege overdracht van impulsmoment).

d) We gebruiken impulsbehoud om de snelheid van het massamiddelpunt uit te rekenen. Voor de botsing bedraagt de totale impuls van het systeem $\vec{P}_{voor} = m_3 v_i \hat{x}$, waarbij $\hat{x}$ de eenheidsvector is in de positieve x-richting. Na de botsing bedraagt de totale impuls $\vec{P}_{na} = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}_{mmp} + m_3 v_f \hat{y}$. Uit impulsbehoud, $\vec{P}_{na} = \vec{P}_{voor}$, vinden we $\vec{v}_{mmp} = \frac{m_3}{\left(m_1 + m_2\right)}\left(v_i \hat{x} - v_f \hat{y}\right)$.

e) De verandering van het impulsmoment van massa $m_3$ t.o.v. de oorsprong, die optreedt als gevolg van de botsing, bedraagt $\Delta\vec{L}_3 = m_3\left(y v_i + x v_f\right)\hat{z}$, waarbij $x$ en $y$ de in de figuur aangegeven projecties zijn van de halter op de x- en y-as.

f) De beweging van het massamiddelpunt van de halter compenseert niet voor deze verandering van het impulsmoment van massa $m_3$. De halter zal rechtsom gaan draaien. De draaisnelheid vinden we met de wet van behoud van impulsmoment, waarbij we het impulsmoment van de halter opgebouwd mogen denken uit een bijdrage t.g.v. de translatiebeweging van het massamiddelpunt van de halter t.o.v. de oorsprong en een bijdrage t.g.v. de rotatie van de halter rondom zijn eigen massamiddelpunt.

$\Delta\vec{L}_{tot} = \vec{l}_1 \times \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}_{mmp} + I_{mmp}\vec{\omega} + \Delta\vec{L}_3 = 0$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}\mu l^2 \vec{\omega} &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(x\hat{x} + y\hat{y}\right) \times \left(m_1 + m_2\right)\frac{m_3}{m_1 + m_2}\left(v_i \hat{x} - v_f \hat{y}\right) - m_3\left(x v_f + y v_i\right)\hat{z} = \\ &= \frac{m_2 m_3}{m_1 + m_2}\left(x v_f + y v_i\right)\hat{z} - m_3\left(x v_f + y v_i\right)\hat{z} \\ &= -\frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2}\left(x v_f + y v_i\right)\hat{z}\end{aligned}$$

Hiermee verkrijgen we de hoeksnelheid van de rotatie van de halter:

$\vec{\omega} = -\frac{m_3}{m_2}\frac{1}{l^2}\left(x v_f + y v_i\right)\hat{z}$.

Zoals al bij (a) verwacht, is dit een rotatie met de wijzers van de klok mee.

OPGAVE 3: pijl en boog

a) De boog en pijl voeren samen een deel uit van een harmonische trilling. De beweging is equivalent aan die van een harmonische oscillator die vanuit stilstand in een uitgeweken positie wordt losgelaten. De pijl laat los van de boog op het neutrale punt (uitwijking $x = 0$). Daarvoor zijn twee redenen: (i) Als het bewegende deel van de boog massa heeft, dan zal dat verder bewegen als een harmonische oscillator. Vanaf $x = 0$ vertraagt deze beweging, terwijl de pijl dan met constante snelheid verder beweegt. Vanaf dat punt lopen ze dus uit elkaar. (ii) Als de boog helemaal geen massa heeft, dan zal deze zonder de massa van de pijl geen beweging meer uitvoeren als de neutraalstand eenmaal is bereikt. Bij $x = 0$ vliegt de pijl dus opnieuw met constante snelheid verder, terwijl de boog in die stand stil blijft staan. Als je het moeilijk vindt om je dit voor te stellen, denk dan eens aan de situatie waarbij de boog een klein beetje zou doorschieten. Dit zou meteen aanleiding geven tot een terugdrijvende kracht, werkzaam op een object met een verwaarloosbare massa; het effect van de kracht is een oneindig hoge versnelling terug naar de neutraalstand. Doorschieten is dus voor de massaloze boog geen optie!

b) De terugdrijvende kracht wordt beschreven door $F=-kx$, waarbij $k$ de veerconstante van de boog is. Dus $m_p\ddot{x}=-kx$. De oplossing hiervan is $x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$, waarbij $\omega=\sqrt{k/m_p}$ en de constanten $A$ en $B$ worden bepaald door de randvoorwaarden dat de pijl vanuit positie $x(0)=-X$ met beginsnelheid $\dot{x}(0)=0$ vertrekt: $A=-X \wedge B=0$, dus $x(t)=-X\cos(\omega t)$. Zoals al bij (a) beschreven is dit een harmonische oscillatie. Na een kwart van de volledige periode komt de pijl los. Na het loskomen beweegt de pijl met constante snelheid verder (afgezien van het effect van de zwaartekracht…).

c) De pijl komt los op het tijdstip waarop de uitwijking voor het eerst nul is: $t=\pi/2\omega$. Op dat tijdstip bedraagt de snelheid $v(\pi/2\omega)=\omega X\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)=\omega X$. Een andere manier om dit te zien is dat de potentiële energie die in de uitgerekte boog is opgeslagen $V=\tfrac{1}{2}kX^2$ bedraagt. Op het moment van loskomen is deze energie volledig omgezet in kinetische energie van de pijl: $\tfrac{1}{2}m_pv^2=\tfrac{1}{2}kX^2 \quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{k/m_p}\,X$.

d) Als het bewegende deel van de boog een effectieve massa $m_b$ heeft, dan werkt de terugdrijvende kracht van de boog op de som van de twee massa's. De beweging blijft die van een harmonische oscillator, maar met een lagere frequentie, namelijk $\omega'=\sqrt{k/(m_b+m_p)}$. De snelheid waarmee de pijl nu loskomt bedraagt $v'=\omega'X$. Dit antwoord kon opnieuw verkregen worden op basis van een simpele energie-overweging. Het tijdstip waarop de pijl loskomt is $t=\pi/2\omega'$.

e) Na het loskomen van de pijl zal de boog verder gaan met zijn harmonische oscillatie. De frequentie daarvan bedraagt $\omega''=\sqrt{k/m_b}$. De amplitude wordt bepaald door de snelheid $v'$ waarmee de boog met massa $m_b$ door de oorsprong beweegt. Deze snelheid bedraagt $v'=\omega'X$ (let op: dus niet $\omega''X$). De nieuwe maximale uitwijking vinden we nu met:
$\tfrac{1}{2}k(X'')^2=\tfrac{1}{2}m_b(v')^2 \quad\Rightarrow\quad X''=\sqrt{m_b/k}\cdot\sqrt{k/(m_b+m_p)}\cdot X=\sqrt{m_b/(m_b+m_p)}\cdot X$.
Dat impliceert dat de boog na het loskomen van de pijl doorschiet tot $x=+X''$.

f) De bewegingsvergelijking voor deze (onder)gedempte harmonische oscillator luidt $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2x=0$, waarbij $\omega=\sqrt{k/m_p}$ opnieuw de eigenfrequentie is van het ongedempte systeem en $\gamma$ de dempingsconstante is. De oplossing van deze bewegingsvergelijking, voor de begincondities van de afgeschoten pijl, is $x(t)=-Xe^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t)$, waarbij de frequentie $\omega_1=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$ lager is dan de oorspronkelijke eigenfrequentie voor het ongedempte systeem. Voor de volledigheid: de pijl komt nu los op tijdstip $t=\pi/2\omega_1$ met snelheid $\omega_1Xe^{-\gamma t}$.