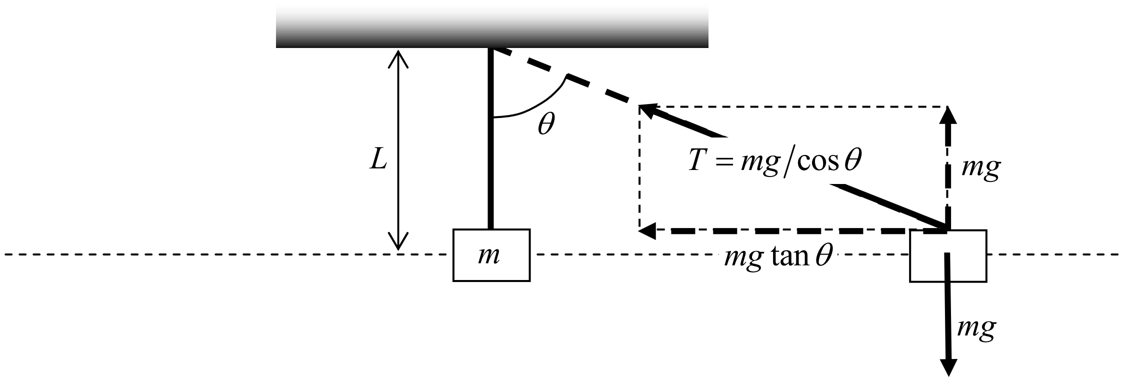
Uitwerking Tentamen Klassieke Mechanica I
Dinsdag 10 juni 2003

OPGAVE 1: de horizontale slinger



a) Op de massa werken twee krachten, namelijk de zwaartekracht, ter grootte mg, en de spankracht T in het koord. De zwaartekracht is naar beneden gericht, terwijl de spankracht langs het koord werkt, in de richting van het ophangpunt. De grootte van T moet zodanig zijn dat de beweging van de massa uitsluitend plaatsvindt in horizontale richting. De verticale component van T is dus ook mg, zodat $T = mg/\cos\theta$ (zie figuur). Deze situatie verschilt een klein beetje van die voor een normale slinger. Uiteraard zijn ook daar de zwaartekracht en de spankracht werkzaam en de richtingen van deze krachten zijn dezelfde als de hier voor de horizontale slinger aangegeven richtingen. Echter, de grootte van de spankracht is voor de normale slinger zodanig dat de lengte van het koord onveranderd blijft, en de massa dus een cirkelbaan beschrijft. Daaruit volgt voor de normale slinger dat $T_{normaal} = mg\cos\theta + mv^2/L$, waarbij de eerste term precies compenseert voor de radiële component van de zwaartekracht en de tweede de benodigde middelpuntzoekende versnelling toevoegt om bij snelheid v in de cirkelbaan te blijven. (omdat vaak de tweede term niet wordt beschouwd, zijn hier antwoorden met uitsluitend de eerste term ook goedgerekend).

b) Van de twee krachten werkt de zwaartekracht altijd loodrecht op de (horizontale) verplaatsing. Deze kan dus geen arbeid leveren, omdat $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$. De spankracht heeft wel een component in de richting van de verplaatsing, namelijk $-T\sin\theta = -mg\tan\theta$. Bij de normale slinger is de situatie precies omgekeerd. Omdat de lengte van het koord voor de normale slinger niet verandert, levert daar de spankracht geen arbeid. Voor alle $\theta \neq 0$ heeft de zwaartekracht een component in de richting van de momentane verplaatsingsrichting, ter grootte $-mg\sin\theta$, en deze levert nu de arbeid.

c) De geleverde arbeid dW, wanneer de uitwijking toeneemt van x naar $x+dx$, bedraagt $dW = (-mg\tan\theta)\,dx$ (zie b). In deze uitdrukking komen nog zowel x als θ voor. We gebruiken $\tan\theta = x/L$ en vinden zo $dW = -\frac{mg}{L}xdx$. Dit laat zich direct integreren tot de totale arbeid die geleverd wordt tussen de evenwichtsstand en positie x: $W(0 \to x) = \int_0^x \left(-\frac{mg}{L}x'\right)dx' = -\frac{mg}{2L}x^2$. Doet deze oplossing komt precies overeen met die voor een harmonische oscillator met veerconstante $k_{eff} = mg/L$.

d) We lezen de bewegingsvergelijking direct af uit de figuur:
$m\ddot{x} = -mg\tan\theta = -mg\frac{x}{L} = -\frac{mg}{L}x$.

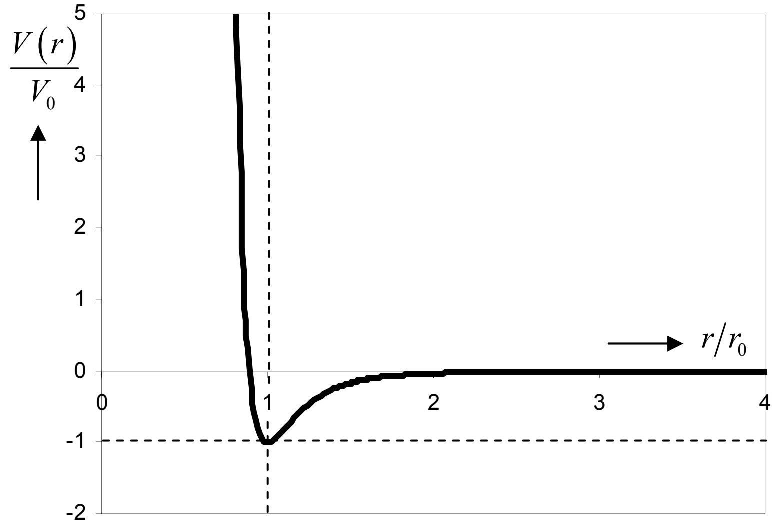
e) Zoals we al bij (c) hadden herkend, zien we bij (d) de bewegingsvergelijking voor een harmonische oscillator met veerconstante $k_{eff} = mg/L$. De oplossing is: $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$, waarbij de hoeksnelheid wordt gegeven door $\omega = \sqrt{g/L}$ en de amplitude A en fasehoek α worden bepaald door de begincondities.

f) Of deze slinger aan behoud van totale energie voldoet, hangt er vanaf hoe we tegen het variëren van de lengte van het koord aankijken. Omdat we hier een strikt voorschrift hebben voor de lengte van het koord als functie van de hoek van de slinger, en daarmee voor de door het koord uitgeoefende kracht als functie van de horizontale positie van de massa, kunnen we een potentiële energie invoeren van de vorm $V(x) = \frac{mg}{2L}x^2$. De som van deze potentiële energie en de kinetische energie is constant. Maar we kunnen er ook anders tegenaan kijken. Omdat de slinger niet in hoogte varieert, verandert de met de zwaartekracht samenhangende potentiële energie niet. De kinetische energie van de slinger verandert echter voortdurend. Dus de totale energie van de slinger is niet constant. Het verschil tussen de twee visies wordt veroorzaakt door het element dat in het eerste geval niet alleen de slinger meetelt bij het bepalen van de potentiële energie, maar ook het mechanisme dat de lengte van het koord bijregelt en daarmee de arbeid levert die verantwoordelijk is voor de veranderingen in de kinetische energie van de slinger. Voor dit meer complete beeld van het systeem geldt wel energiebehoud. (beide antwoorden zijn dus goed, als ze maar voorzien zijn van de juiste redenering!)

OPGAVE 2: het Lennard-Jones molecuul

a) We vinden de evenwichtsafstand door te eisen dat de kracht nul is. Dus: $F(r) = -\frac{dV}{dr} = 12\frac{V_0}{r_0}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\right] = 0$, waaruit meteen volgt dat $r = r_0$. De potentiële energie op deze afstand vinden we door invullen: $V(r_0) = -V_0$.

b) Zie de grafiek op de volgende bladzijde. De stippellijnen geven de het evenwichtspunt $(r_0, -V_0)$ aan.



c) We benaderen nu de directe omgeving van het minimum met een parabool (harmonische benadering). De gevraagde effectieve veerconstante t.o.v. de evenwichtspositie komt overeen met de locale kromming van de potentiële energie:

$$k_{eff} = \left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_0} = 12\frac{V_0}{r_0^2}\left[13\left(\frac{r_0}{r}\right)^{14} - 7\left(\frac{r_0}{r}\right)^{8}\right]_{r=r_0} = 72\frac{V_0}{r_0^2}.$$

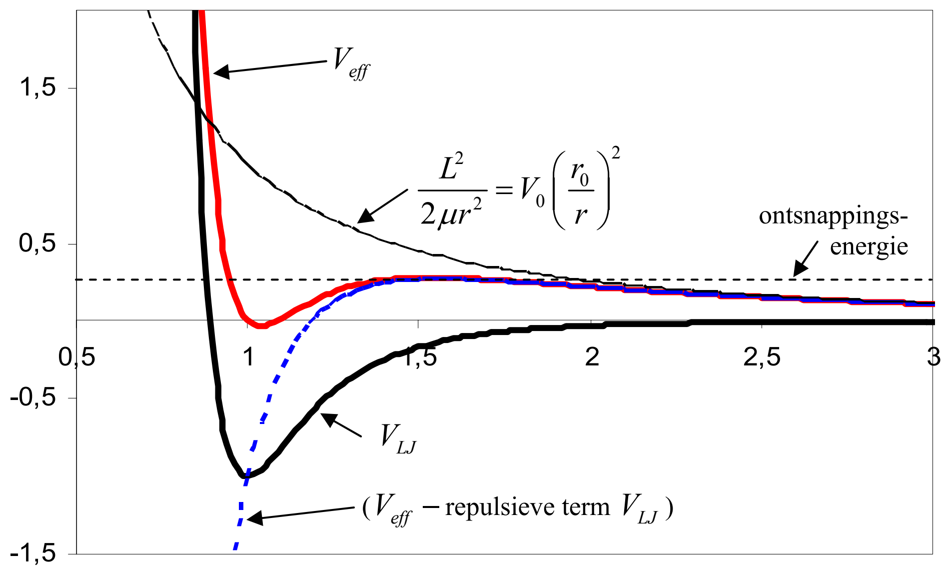
De kracht kunnen we nu lineair benaderen als $F(r) = -k_{eff}(r - r_0)$. Dat betekent dat de kracht op de gevraagde positie van $r = 1.05\,r_0$ in deze benadering de volgende waarde heeft: $F(1.05\,r_0) = -72\frac{V_0}{r_0^2}0.05\,r_0 = -3.6\frac{V_0}{r_0}$.

d) De periode van de trilling wordt gegeven door $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k_{eff}}}$. De massa die hierin optreedt, is de effectieve massa $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. Voor $m_1 = m_2$ wordt dit $\mu = \frac{1}{2}m_1$, zodat $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi r_0}{6}\sqrt{\frac{m_1}{V_0}}$. Als $m_1 \ll m_2$, geldt $\mu \approx m_1$, zodat $T \approx \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi r_0}{6}\sqrt{\frac{2m_1}{V_0}}$.

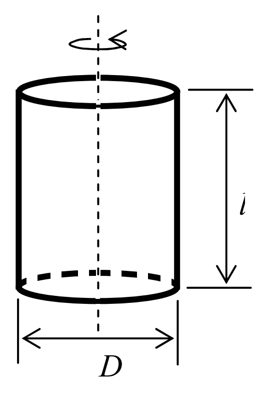
e) $V_{eff}(r) = V_{LJ}(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$, waarbij V_{LJ} de gegeven Lennard-Jones potentiaal voorstelt en L het impulsmoment van het atoompaar t.o.v. van hun gezamenlijke massamiddelpunt

f) Als de effectieve potentiële energie precies op nul uitkomt bij de afstand die voor het niet draaiende molecuul de evenwichtsafstand was, dan moeten we dus voldoen aan $V_{eff}(r_0) = 0$, ofwel $\frac{L^2}{2\mu r_0^2} = V_0$. Hieruit volgt $L^2 = \left(\mu r_0^2\dot{\theta}\right)^2 = 2\mu r_0^2 V_0$, zodat $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2V_0}{\mu r_0^2}}$. De omwentelingstijd van het molecuul bedraagt dus $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \pi\sqrt{\frac{2\mu r_0^2}{V_0}}$.

g) De effectieve potentiële energie heeft de vorm (zie f) $V_{eff}(r) = V_{LJ}(r) + V_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2$. Dit ziet er als volgt uit:



We zien dat de effectieve potentiële energie een maximum vertoont bij $r \approx 1.5 r_0$, dat goed wordt benaderd door het maximum in de vereenvoudigde effectieve potentiële energie, waarbij de repulsieve term van de Lennard-Jones potentiaal is weggelaten: $V_{eff}(r) \approx -2V_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 + V_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2$. Het molecuul zal uit elkaar vliegen als de totale energie hoger is dan dit maximum. We vinden de positie r_* van het maximum door deze vereenvoudigde vorm van de effectieve potentiële energie naar de afstand te differentiëren en op nul te stellen, waaruit volgt dat $\frac{r_*}{r_0} = 6^{1/4} \approx 1.5$. De hoogte van het maximum vinden we door invullen: $V_{eff}(r_*) \approx -2V_0(6)^{-3/2} + V_0(6)^{-1/2} = \frac{1}{9}\sqrt{6}\,V_0$. Voor totale energieën $E \geq \frac{1}{9}\sqrt{6}\,V_0$ zal het molecuul uiteenvallen.



OPGAVE 3: draaiend ruimtevaartuig

a) Het traagheidsmoment t.o.v. de aangegeven draaias vinden we door integratie: $I_0 = l\int_0^{D/2} \rho r^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{32}\pi\rho l D^4 = \frac{1}{8}MD^2$. (hierbij is ρ de dichtheid; massa/vol.eenheid)

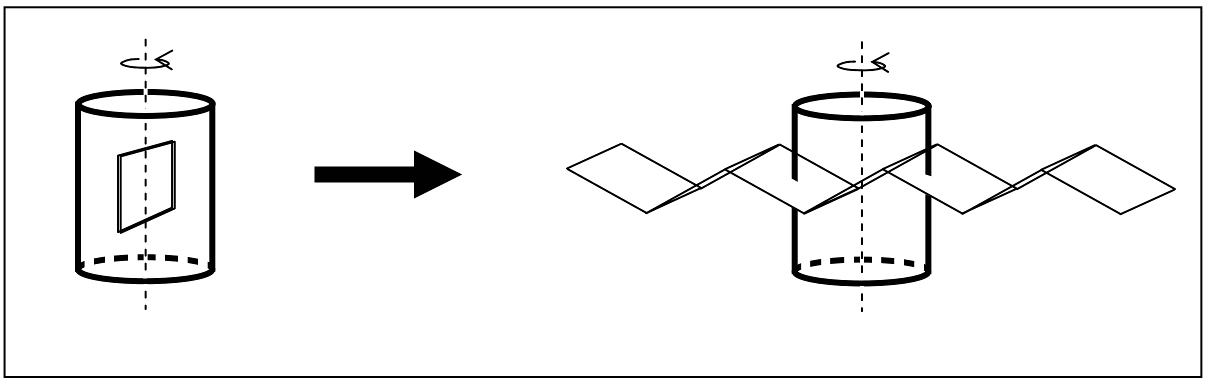
b) De grootte van het impulsmoment bedraagt $L = I\omega = \frac{1}{8}MD^2\omega$.

c) Om de verandering van het traagheidsmoment uit te rekenen bepalen we eerst het aandeel van het nog volledig samengevouwen paneel aan I_0. De massa m van het paneel is gelijkmatig verdeeld over een lijnstuk met lengte D, dat door de draaias loopt (de coördinaat parallel aan de draaias is niet van belang). We vinden

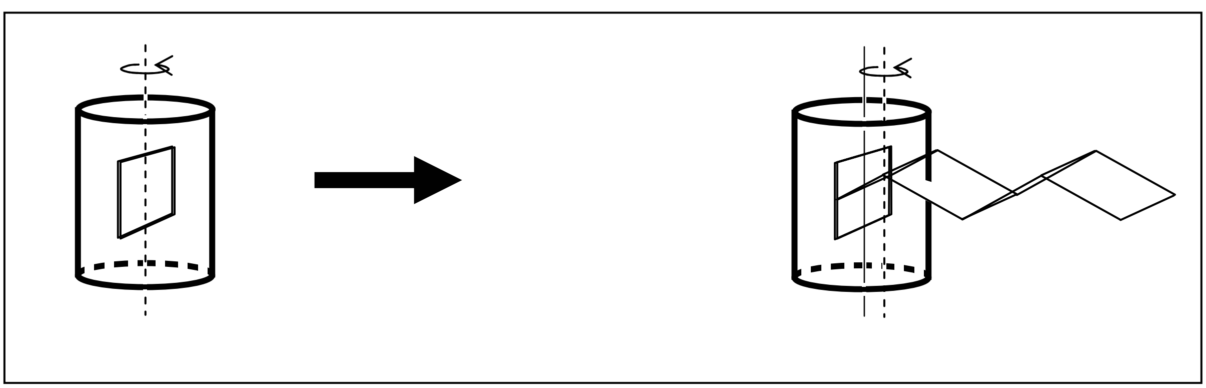
$I_{paneel}^{in} = 2\int_0^{D/2} \lambda_{paneel} y^2 dy = \frac{1}{12} mD^2$. (hierbij is λ de dichtheid; massa/lengte-eenheid).

Vervolgens bepalen we het nieuwe traagheidsmoment van het paneel, wanneer het is uitgeklapt: $I_{paneel}^{uit} = 4\int_0^{W/2} dx \int_0^{D/2} \sigma_{paneel}\left(x^2 + y^2\right) dy = \frac{1}{12} m\left(W^2 + D^2\right)$. (hierbij is σ de dichtheid; massa/oppervlakte-eenheid). Het nieuwe traagheidsmoment van het ruimtevaartuig wordt $I_1 = I_0 - I_{paneel}^{in} + I_{paneel}^{uit} = \frac{1}{8} MD^2 + \frac{1}{12} mW^2$. De nieuwe hoeksnelheid vinden we met behulp van de wet van behoud van impulsmoment.

$$L = I_1\omega_1 = I_0\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{I_0}{I_1}\omega = \left[1 + \frac{2}{3}\frac{m}{M}\left(\frac{W}{D}\right)^2\right]^{-1} \omega .$$



d) De twee krachten samen leveren een krachtmoment ter grootte $\tau = FD$. De benodigde tijd vinden we via $\Delta t = \dfrac{\Delta L}{\tau} = \dfrac{\omega\left(I_1 - I_0\right)}{FD} = \dfrac{mW^2\omega}{12FD}$.



e) De nieuwe draaias moet door het nieuwe massamiddelpunt lopen. De verplaatsing van de draaias vinden we daarom met $M\Delta x = \left(M - \tfrac{1}{2}m\right)\cdot 0 + \tfrac{1}{2}m \cdot \tfrac{1}{4}W \;\Rightarrow\; \Delta x = \dfrac{mW}{8M}$.

f) Het traagheidsmoment t.o.v. de bij (e) berekende as berekenen we als de som van de bijdragen van de cilinder (verminderd met een half, nog niet uitgeklapt paneel) en van het halve, uitgeklapte paneel. Voor beide onderdelen maken we hierbij gebruik van het parallelle-as theorema. Om dit theorema toe te kunnen passen moeten we voor elk van de onderdelen uit gaan van het midden (symmetrieas) van dat onderdeel, dus voor het cilindergedeelte van de as bij $x=0$ en voor het halve zonnepaneel bij $x = \tfrac{1}{4}W$.

$$\begin{aligned}
I_2 &= I_0 - \tfrac{1}{2}I_{paneel}^{in} + \left(M - \tfrac{1}{2}m\right)\left(\Delta x\right)^2 + \tfrac{1}{24}m\left[\left(\frac{W}{2}\right)^2 + D^2\right] + \tfrac{1}{2}m\left(\tfrac{1}{4}W - \Delta x\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{8}MD^2 - \tfrac{1}{24}mD^2 + \tfrac{1}{64}\left(M - \tfrac{1}{2}m\right)\left(\frac{m}{M}\right)^2 W^2 + \tfrac{1}{96}mW^2 + \tfrac{1}{24}mD^2 + \tfrac{1}{128}m\left(2 - \frac{m}{M}\right)^2 W^2 \\
&= \tfrac{1}{8}MD^2 + \tfrac{1}{8}mW^2\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{8}\frac{m}{M}\right].
\end{aligned}$$