HERTENTAMEN KLASSIEKE MECHANICA 1
Bij het college van Prof. J.M. van Ruitenbeek
5 augustus 2004, 14-17 uur

Schrijf op elk vel dat u inlevert je NAAM en STUDIERICHTING en COLLEGEKAARTNUMMER.
Het tentamen bestaat uit drie onderdelen.

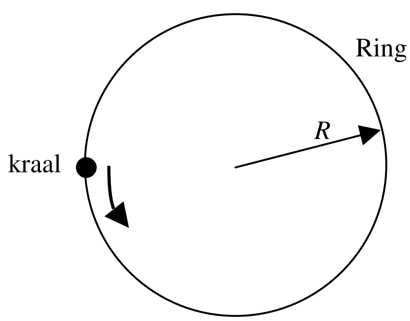
1. Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen.

[a] Een steen met massa m valt door de lucht onder invloed van de zwaartekracht met constante valversnelling en wordt geremd door een lineaire wrijvingskracht $F_w = -c\dot{x}$, waar x de coördinaat gericht is langs de verticale as.
Geef de bewegingsvergelijking.
Bereken de eindsnelheid (*terminal velocity*) voor een wrijvingsconstante $c = 1 \cdot 10^{-3}$ kg/s, valversnelling g =10 m/s^2 en massa m = 0.1 kg.

[b] Bekijk de plaatsvector $\vec{r}(t) = r\,\hat{e}_r$ gegeven in poolcoördinaten (in twee dimensies). Geef de snelheidsvector in poolcoördinaten, in termen van de tijdsafgeleide van de plaatscoördinaten

[c] Gegeven is de volgende potentiële energie functie $V(x,y,z) = c\, e^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$.
Bereken de bijbehorende kracht.

[d] Een kraal glijdt wrijvingsloos over een verticaal staande cirkelvormige ring met straal R = 5 m onder invloed van de zwaartekracht (zie figuur). De kraal wordt losgelaten ter hoogte van het centrum van de ring. Stel de valversnelling op g = 10 m/s^2. Bereken de snelheid van de kraal op het laagste punt. Hoe wordt de kracht die de ring op de kraal uitoefent ook wel genoemd (liefst de Engelse term)?



[e] Een rode biljartbal botst elastisch met snelheid v precies midden op een stilliggende witte bal, met exact dezelfde massa. Verwaarloos wrijving. Wat zijn de snelheden van de twee ballen na de botsing? Geef een korte afleiding.

Wordt vervolgd op achterzijde…

2. Aangedreven gedempte harmonische oscillator

De bewegingsvergelijking voor een aangedreven gedempte oscillator ziet er als volgt uit:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = Fe^{i\omega t} ,$$

waarbij r de dempingfactor is, b de veerconstante en F de amplitude van de harmonische aandrijvende kracht, hier in complexe notatie. Bekijk een oplossing van de vorm $x(t) = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$.

[a] Geef een afleiding voor de amplitude A en de fase φ als functie van de aandrijffrequentie ω, en laat zien dat deze geschreven kunnen worden als

$$A(\omega) = \frac{F}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}},$$

$$\tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

[b] Schets een grafiek van de amplitude als functie van de frequentie. Bij welke frequentie heeft de amplitude zijn maximum (amplituderesonantie)? Hoe groot is de amplitude op resonantie?

[c] Schets een grafiek van de fase als functie van de frequentie. Bij welke frequentie gaat de fase door $\pi/2$ (faseresonantie)?

[d] Hoe gedragen de amplitude en fase zich bij zeer lage frequentie, $\lim \omega \to 0$? Verklaar dit aan de hand van de fysische eigenschappen van het probleem.

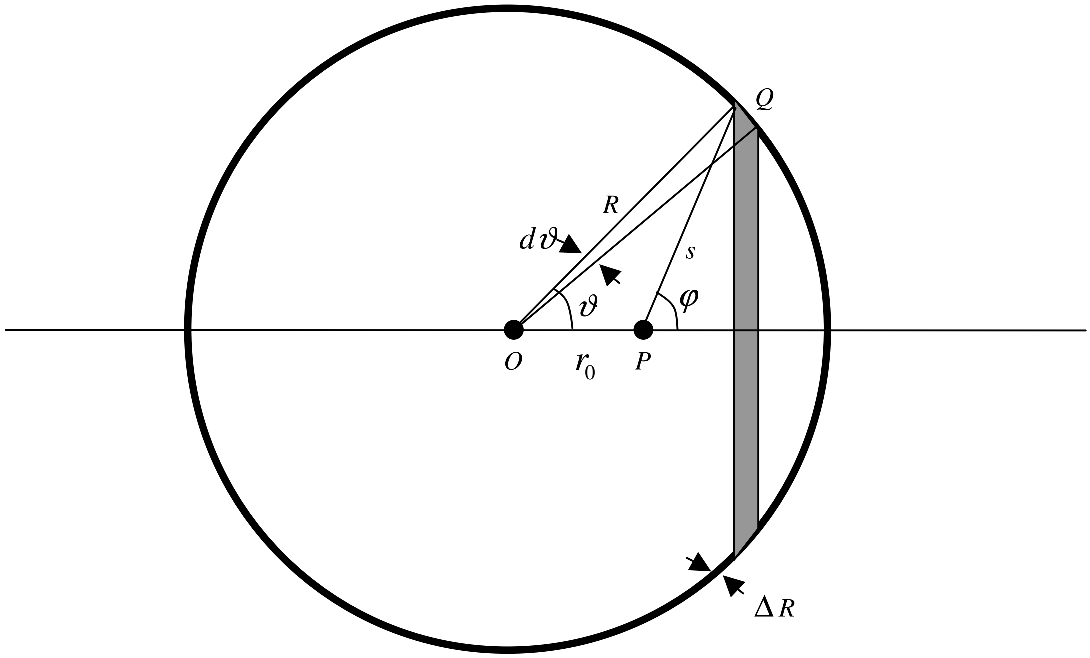
[e] Hoe gedragen de amplitude en fase zich bij zeer hoge frequentie, $\lim \omega \to \infty$? Verklaar dit aan de hand van de fysische eigenschappen van het probleem.

[f] Veronderstel dat ik een experiment uitvoer waarbij ik last heb van trillingen in de vloer van het gebouw met belangrijkste component bij een frequentie ω_a. Ik besluit mijn opstelling op te hangen aan een veer zodat de resonantiefrequentie van dit massa-veersysteem ω_0 wordt. Hoe moet ik ω_0 kiezen om zoveel mogelijk profijt te hebben van de ingreep? Waarom is het verstandig ook een demping aan te brengen?

Wordt vervolgd op volgende blad…

3. Vallen door een gat in de aarde

We bekijken eerst een zeer dunne bolschil met straal R, dikte ΔR ($\Delta R << R$), en met een dichtheid (massa per volume-eenheid) ρ.



Een testmassa *m* bevindt zich op een willekeurig punt P *binnen* de bol op afstand r_0 van het centrum O, zie figuur. Laat zien door analytische berekening dat de zwaartekracht op de massa nul is. Gebruik hiertoe de volgende stappen.

[a] Geef een uitdrukking voor de massa dM_r van het grijze ringelement in termen van de afmetingen, de hoeken, en de massadichtheid. Wat is de massa ΔM_b van de totale bolschil?

[b] Geef een uitdrukking voor de bijdrage dV_r van het ringelement aan de gravitationele potentiële energie van de testmassa.

[c] Gebruik goniometrie om een relatie tussen s, r_0, R, en ϑ te vinden en laat hiermee zien dat geldt: $\sin\vartheta\, d\vartheta = (s / r_0 R)\, ds$

[d] Integreer nu over de volledige bolschil en bepaal de totale potentiële energie ΔV_b van de testmassa in het veld van de bolschil. Bepaal nu ook de kracht werkend op de testmassa.

[e] Geef, zonder berekening, een uitdrukking voor de gravitationele potentiële energie van een testmassa die zich *buiten* de bolschil bevindt.

Wordt vervolgd op achterzijde…

[f] Veronderstel nu dat we een kaarsrechte smalle tunnel dwars door de aarde kunnen boren die precies door het centrum gaat tot aan de andere kant. We laten een steentje met massa *m* in het gat vallen. Laat zien dat de potentiële energie van het steentje als functie van de afstand r_0 tot het centrum van de aarde geschreven kan worden als.

$$V(r_0) = -\tfrac{3}{2}\frac{GM_a m}{R_a}\left[1-\tfrac{1}{3}\left(\frac{r_0}{R_a}\right)^2\right]$$

Hier is $M_a = 6{,}0\cdot 10^{24}$ kg de massa van de aarde, $R_a = 6{,}4\cdot 10^6$ m de straal van de aarde en $G = 6{,}7\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ de gravitatieconstante van Newton.

[g] Wanneer we het steentje nu loslaten boven de verticale tunnel, beschrijf dan in woorden welke beweging het steentje zal uitvoeren.

[h] Verwaarloos wrijving. Hoe lang duurt het voordat het steentje weer bij ons terug is?