

TENTAMEN KLASSIEKE MECHANICA 1
Bij het college van Prof. J.M. van Ruitenbeek
14 juni 2004, 10-13 uur

Schrijf op elk vel dat u inlevert je NAAM en STUDIERICHTING en COLLEGEKAARTNUMMER.

Het tentamen bestaat uit vier onderdelen.

1. Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen.

[a] De eenheidskubus is een kubus waarvan de zijden een lengte 1 hebben (in bepaalde lengte-eenheden). We kiezen het hoekpunt vooraan links onderaan als de oorsprong O . De vector \vec{A} wijst vanuit O langs een hoofddiagonaal (dwz. Een diagonaal die door het centrum van de kubus loopt) naar het tegenoverliggende hoekpunt. Vector \vec{B} wijst vanuit O langs de voorste rand naar het hoekpunt rechts onder. Bepaal de coördinaten van het kruisproduct $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. Bereken de hoek tussen de vectoren \vec{A} en \vec{B}

[b] We bekijken een eendimensionaal probleem met een kracht $F(x, \dot{x}, t)$ die werkt op een deeltje met massa m . Het deeltje wordt verplaatst van x_0 naar x_1 . Geef een uitdrukking voor de arbeid die de kracht verricht heeft. Onder welke voorwaarde is de arbeid gelijk aan de verandering in de potentiële energie? Hoe wordt een kracht genoemd die aan deze voorwaarde voldoet?

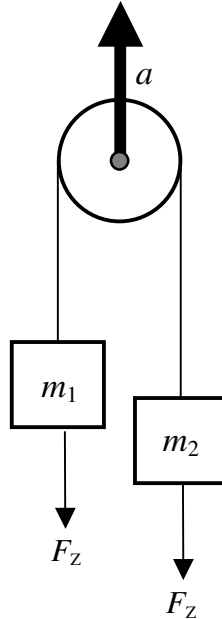
[c] Wanneer we in Leiden een steen laten vallen vanaf een verticaal geplaatste toren, komt de steen dan exact aan de voet van de toren neer, of is er een afwijking? Zo ja, in welke richting en leg uit waarom in die richting?

[d] Laat zien dat de Perkenwet van Kepler volgt uit behoud van impulsmoment.

[e] Op een ideale biljarttafel botst een witte bal op een stilliggende rode bal. De botsing is volledig elastisch en de massa's zijn exact gelijk. Leid een uitdrukking af voor de hoek tussen de banen van de ballen na de botsing en laat zien dat het een rechte hoek is.

Wordt vervolgd op achterzijde...

2. Aan een ideale massaloze en wrijvingsloze katrol hangen twee massa's m_1 en m_2 aan een ideaal koord. Veronderstel dat de katrol verticaal omhoog wordt versneld met een versnelling a . Er heerst bovendien zwaartekracht F_z , die de massa's een valversnelling g omlaag geeft. Zie de onderstaande figuur.



[a] Laat zien dat de relatie $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ geldt, met a_1 en a_2 de versnelling van m_1 respectievelijk m_2 ten opzichte van de grond.

[b] Vind een uitdrukking voor de spankracht in het koord in termen van m_1 , m_2 , g en a .

[c] Vind een uitdrukking voor de versnelling van m_1 en m_2 ten opzichte van de katrol, in termen van m_1 , m_2 , g en a .

[d] Veronderstel $m_1 = m_2$. Welke beweging voeren de beide massa's uit ten opzichte van de katrol? Verklaar dit in woorden.

[e] Veronderstel dat m_2 veel groter is dan m_1 . Welke beweging voeren de beide massa's uit ten opzichte van de grond? Verklaar dit in woorden.

[f] Veronderstel $m_1 = 2m_2$. Bij welke waarde van de versnelling a zal massa m_1 niet versneld worden ten opzichte van de grond?

Wordt vervolgd op volgende blad...

3. Een geladen deeltje met lading q en massa m beweegt onder invloed van een Lorentzkracht ten gevolge van een homogeen magnetisch veld dat langs de z -richting staat, $\vec{B} = (0,0,B)$.

[a] Beschrijf in woorden wat je verwacht voor de baan die het deeltje zal beschrijven wanneer het met een willekeurige beginsnelheid wordt gelanceerd. (Hier nog geen afleidingen of rekenwerk).

[b] Laat zien dat de bewegingsvergelijking voor het deeltje in Cartesische coördinaten geschreven kan worden als

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Druk ω_c uit in de fysische parameters van het probleem.
Zijn de krachten ontbindbaar?

[c] Als een eerste stap naar een oplossing kunnen de bewegingsvergelijkingen een keer geïntegreerd worden. Voer deze integratie uit.

[d] Gebruik het resultaat van deze integratie in de oorspronkelijke bewegingsvergelijkingen en laat zien dat de bewegingsvergelijking voor x geschreven kan worden als

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = K$$

[e] Geef de algemene oplossing $x(t)$ voor deze differentiaalvergelijking.

[f] Geef nu ook de oplossing voor de andere richting, $y(t)$, door gebruik te maken van het resultaat onder [c]

[g] Veronderstel dat het deeltje wordt gelanceerd met begincondities

$$\vec{r}(0) = (R,0,0), \quad \dot{\vec{r}}(0) = (0,v,0)$$

Geef de oplossingen voor $x(t)$ en $y(t)$ voor dit geval.

[h] Wat is de vorm van de baan in het xy -vlak en wat is het centrum van de beweging?

[i] Los ten slotte ook de differentiaalvergelijking voor z op. Wat is de vorm van het pad in drie dimensies?

Wordt vervolgd op achterzijde...

4. Iemand bevindt zich op aarde pal onder een zogenoemde geostationaire satelliet, dwz. een satelliet die permanent boven een vaste plaats op aarde staat.

[a] Wat kun je zeggen over de plaats op aarde waar deze persoon zich bevindt?

[b] Reken voor de geostationaire satelliet de afstand uit ten opzichte van het centrum van de aarde. Je kunt hierbij gebruik maken van de gegevens dat de aardstraal ca. 6500 km bedraagt en de valversnelling op het aardoppervlak ca. 10 m/s^2 is.

[c] Welke snelheid heeft de satelliet?

[d] Op een gegeven moment wordt de raketmotor van de satelliet kort aangezet, zodanig dat de satelliet in de voorwaartse richting (de bewegingsrichting) een krachtstoot P krijgt. Hoe groot zou de krachtstoot P moeten zijn om de satelliet net voldoende energie te geven om hem te laten ontsnappen aan de aantrekkingskracht van de aarde? De massa van de satelliet is 100 kg. Hoe ziet de nieuwe baan van de satelliet eruit? Maak een schets van het probleem en leg uit wat er gebeurt. Laat de verandering in massa van de satelliet ten gevolge van de verbruikte brandstof buiten beschouwing, evenals de invloeden van andere hemellichamen.

[e] Hoeveel energie moet de raketmotor hiervoor leveren?