TENTAMEN KLASSIEKE MECHANICA 1
Bij het college van Prof. J.M. van Ruitenbeek
13 juni 2005, 10-13 uur

Schrijf op elk vel dat je inlevert je NAAM en STUDIERICHTING en COLLEGEKAARTNUMMER.
Het tentamen bestaat uit vier onderdelen.

1. Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen.

[a] Een kracht wordt gegeven door de volgende functie $\vec{F}(x,y,z) = (-ax + 2ax^3)\,\hat{i} - ay\,\hat{j} - az\,\hat{k}$. Bestaat er een potentiële energiefunctie bij deze kracht? Zoja, bereken dan het verschil in potentiële energie tussen de punten $(x,y,z) = (0,0,0)$ en $(1,0,0)$

[b] In welke richting draaien de winden rond een depressie op het noordelijk halfrond, en wat is hiervoor de verklaring? Een kwalitatieve beschrijving is hier voldoende, afleidingen worden niet gevraagd.

[c] Hoe is de kwaliteitsfactor van een harmonische oscillator gedefinieerd? Wanneer we voor een aangedreven ondergedempte harmonische oscillator de resonantiecurve van de amplitude als functie van de aandrijffrequentie bekijken, hoe komt de kwaliteitsfactor dan tot uiting? Een kwalitatieve beschrijving is hier voldoende, afleidingen worden niet gevraagd.

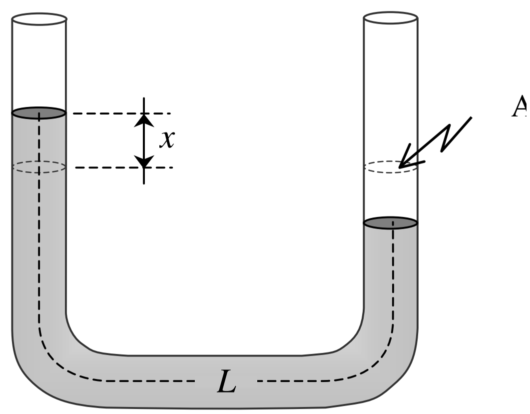
[d] Wat wordt bedoeld met het begrip centrifugale barrière (ook wel centrifugale potentiaal genoemd)? Is het een vorm van potentiële energie; zo ja, welke kracht is er dan mee geassocieerd; zo nee wat is het dan wel?

[e] Op een systeem van twee deeltjes werken geen externe krachten, maar ze oefenen wel een kracht op elkaar uit. Geef een afleiding vanuit de wetten van Newton om te laten zien dat de totale impuls van het systeem behouden is.

Wordt vervolgd op achterzijde…

2. Gedempte harmonische oscillatoren

We bekijken een oscillerend systeem in de vorm van een gedeeltelijk met water gevulde U-buis (zie figuur). De buis heeft overal dezelfde doorsnede (oppervlakte) A. De totale lengte van de waterkolom (gestippelde lijn) bedraagt L. Het water heeft een dichtheid (soortelijke massa) gegeven door ρ, en het ondervindt de standaard valversnelling op aarde, g.



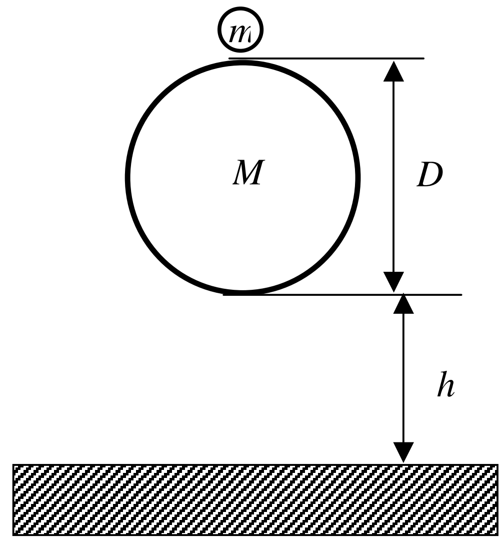
[a] Laat zien dat het watersysteem zich als een harmonische oscillator gedraagt. Wat is de effectieve “veerconstante” van dat systeem?

Veronderstel dat de stroming van water in de buis een wrijvingskracht $F_w = -wL\dot{x}$ ondervindt.

[b] Geef de bewegingsvergelijking voor dit systeem en geef de algemene vorm van de oplossing van deze differentiaalvergelijking. Onderscheid drie gevallen, bespreek de aard van de resulterende beweging en schets die in een grafiekje.

Wordt vervolgd op volgende blad…

3. Bij aanvang van het eerste college werd een proef gedemonstreerd. Een tennisbal werd op een voetbal geplaatst en dit geheel stuiterde op de grond. De ballen worden losgelaten op een hoogte h boven de grond. De massa van de tennisbal is m en die van de voetbal is M. We verwaarlozen wrijving en veronderstellen dat de botsingen volledig elastisch zijn.



[a] Welke snelheid hebben de ballen op het moment dat de voetbal de grond raakt?

Veronderstel voor de volgende vragen dat er vóór de botsingen een kleine afstand bestaat tussen de ballen, en beschouw het probleem als een opeenvolging van afzonderlijke botsingen.

[b] Welke snelheden hebben de ballen nadat de voetbal loskomt van de grond?

[c] Bereken de snelheid van de tennisbal na de onderlinge botsing van de twee ballen. (TIP: let goed op de tekens van de snelheden) .

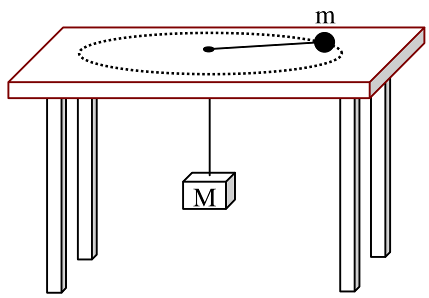
[d] Hoeveel groter kan de snelheid van de tennisbal ten opzichte van de snelheid vóór stuiteren maximaal worden, wanneer we m veel kleiner dan M veronderstellen?

[e] Hoe hoog komt de tennisbal dan maximaal? Wanneer je vindt dat de bal hoger komt dan de beginhoogte, is die uitkomst dan niet in strijd met de wet van behoud van energie? Geef uitleg.

[f] Wat wordt de snelheid van de bovenste bal wanneer we twee gelijke ballen boven elkaar laten stuiteren? Komt de uitkomst van de berekening overeen met je verwachting? Motiveer je antwoord.

Wordt vervolgd op achterzijde…

4. Een ideaal flexibel massaloos touw heeft een lengte ℓ. Het touw steekt door een gat in een tafel. Aan het eind van het touw onder de tafel hangt een blok met massa M. Aan het andere eind boven de tafel draait een kogel met massa m rond met hoeksnelheid $\dot{\vartheta}(t)$. De beweging van de kogel $\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r(t)$ kan worden beschreven met poolcoördinaten in het vlak van de tafel, waarbij $\hat{e}_r$ de eenheidsvector parallel aan $\vec{r}$ is. Verwaarloos wrijving en veronderstel dat het blok onder de tafel zuiver verticaal beweegt.



[a] Laat door differentiëren zien dat de versnelling van de kogel kan worden weergegeven in poolcoördinaten als $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\hat{e}_\vartheta$. Maak waar nodig gebruik van een plaatje.

[b] Geef de bewegingsvergelijkingen voor de kogel en voor het blok.

[c] Laat zien dat het impulsmoment $\vec{L}$ van de kogel geschreven kan worden als $\vec{L} = mr^2\dot{\vartheta}\,\hat{e}_z$, met $\hat{e}_z$ de eenheidsvector langs de positieve verticale as. Laat nu zien dat uit één van de vergelijkingen onder [b] volgt dat L constant is.

[d] Bepaal de totale energie van het systeem als som van kinetische en potentiële energie en laat zien dat geldt:

$$\tfrac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + mgr = E \quad \text{is constant.}$$

[e] Bekijk nu de beweging van het blok met massa M onder de tafel, en schets de vorm van de effectieve potentiële energie behorende bij de beweging van het blok. Bepaal de evenwichtspositie z van de massa onder de tafel voor gegeven waarde van het impulsmoment L.

[f] Wanneer we het blok in de evenwichtspositie besproken in onderdeel [e] een zetje naar beneden geven welke beweging gaat deze dan uitvoeren? Wat wordt de beweging van de kogel dan? Een kwalitatieve beschrijving van de bewegingen onderbouwd met argumenten is voldoende; een berekening wordt hier niet gevraagd.