**TENTAMEN KLASSIEKE MECHANICA 1**
13 juni 2005, 10-13 uur
UITWERKINGEN

**1.** Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen.

[a] Een kracht wordt gegeven door de volgende functie
$\vec{F}(x,y,z) = (-ax + 2ax^3)\,\hat{i} - ay\,\hat{j} - az\,\hat{k}$ .
Er bestaat een potentiële energiefunctie bij deze kracht wanneer de kracht conservatief is: dwz. niet van tijd en snelheid afhangt en wanneer deze voldoet aan $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$. Aan de eerste eis is evident voldaan. Testen van de rotatie:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -ax+2ax^3 & -ay & -az \end{vmatrix} = 0.$$ Is dus ook aan voldaan.

Conclusie: er bestaat een potentiële energie functie. Omdat de kracht ontbindbaar is, is deze eenvoudig te berekenen:

$$V(x,y,z) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\left[\int_{x_0}^{x} F_x(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} F_y(y)\,dy + \int_{z_0}^{z} F_z(z)\,dz\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}a(x^2+y^2+z^2) - \tfrac{1}{2}ax^4 + V(x_0,y_0,z_0).$$

Het verschil in potentiële energie tussen de punten $(x,y,z) = (0,0,0)$ en $(1,0,0)$ is dan: $V(0,0,0) - V(1,0,0) = 0 - \left[\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}a\right] = 0$ .

[b] Op het noordelijk halfrond draaien de winden rond een depressie tegen de klok in. Dit is een gevolg van de Corioliskracht, de schijnkracht die we ervaren in het coördinatenstelsel dat meedraait met het aardoppervlak. De lucht zal zich willen verplaatsen in de richting van het lagedrukgebied. Komend vanaf het zuiden heeft de luchtmassa een te grote snelheid in de draairichting van de aarde omdat de afstand tot de draaias van de aarde dichter bij de evenaar groter is. De aarde draait naar het oosten toe dus de luchtmassa die naar het lagedrukgebied toe beweegt wordt naar het oosten afgebogen. Voor luchtmassa's afkomstig van het noorden geldt het omgekeerde: ze hebben een te kleine draaisnelheid en worden daarom naar het westen afgebogen. Alles spiraliseert zo tegen de klok in naar het centrum van de depressie.

[c] De kwaliteitsfactor $Q$ van een harmonische oscillator is gedefinieerd als $2\pi$ maal de verhouding van totale energie opgeslagen in de harmonische beweging tot het energieverlies gedurende één periode.
In de resonantiecurve van de amplitude als functie van de aandrijffrequentie voor een aangedreven ondergedempte harmonische oscillator bepaalt de kwaliteitsfactor de breedte en de hoogte van de resonantiepiek. Voor grote $Q$

is de piek smal en hoog; de hoogte is ongeveer evenredig met $Q$; de breedte is bij benadering omgekeerd evenredig met $Q$.

[d] Voor de beschrijving van een deeltje in een centraal krachtenveld geldt behoud van impulsmoment $L$. Wanneer het deeltje de oorsprong nadert, zodat de afstand $r$ tot het centrum van de kracht kleiner wordt, dan moet het sneller gaan draaien om $L$ constant te houden. Van de totale energie wordt dan een grotere fractie besteed aan de rotatiekinetische energie, zodat er minder overblijft voor de radiale beweging. Bij voldoende dichte nadering komt de radiale beweging tot stilstand en keert het deeltje om. Dit effect vormt dus een effectieve barrière die voorkomt dat het deeltje de oorsprong kan bereiken. Het is dus niet echt een vorm van potentiële energie, maar een component van de kinetische energie die uitsluitend afhangt van afstand $r$ als gevolg van het behoudt van impulsmoment $L$.

[e] Op een systeem van twee deeltjes werken geen externe krachten, maar ze oefenen wel een kracht op elkaar uit. De bewegingsvergelijken volgens Newton zijn:

$$\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_{12}$$
$$\dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{21}$$

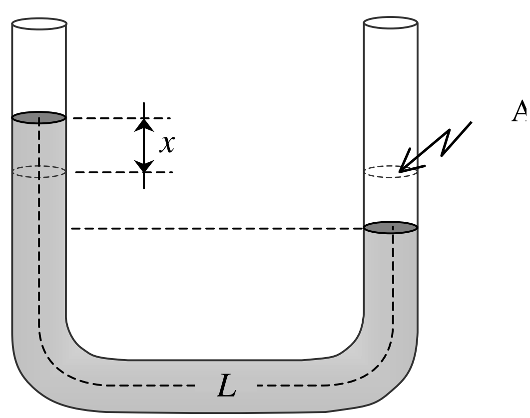
De totale impuls is de som van de twee, en daarvoor geldt:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$$

Volgens Newton (actie = –reactie) geldt $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, waarmee

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = 0 \qquad \text{QED.}$$

## 2. Gedempte harmonische oscillatoren




[a] Op een gegeven tijdstip staat het water links in de buis $2x$ hoger dan rechts (zie figuur). Wanneer we de waterkolommen opgebouwd denken uit schijfjes, dan wordt de

zwaartekracht werkend op elk schijfje in de rechter kolom exact in evenwicht gehouden door die werkend op een schijfje op dezelfde hoogte in de linker kolom. Alleen de zwaartekracht werkend op de schijfjes in het stuk $2x$, dat boven de rechter kolom uitsteekt, wordt niet gecompenseerd. Dit is verantwoordelijk voor de netto terugdrijvende kracht.

De massa van het stuk $2x$ is: $m = \rho \cdot A \cdot 2x$,

met $\rho$ de dichtheid van water.

De totale massa van de hele waterkolom is $M = \rho \cdot A \cdot L$

De positie van de waterkolom kan worden beschreven met de coördinaat $x$, en de bewegingsvergelijking wordt:

$$M\ddot{x} = -mg \quad \text{(let op onderscheid tussen } m \text{ en } M\text{)}$$

Dit is de bewegingsvergelijking van een harmonische oscillator. Voor een massaveersysteem ziet deze eruit als

$$m_v\,\ddot{x} + k_v\,x = 0$$

Met $m_v$ de massa hangend aan de veer en $k_v$ de veerconstante.

De effectieve “veerconstante” van ons systeem is dus $k_{\mathrm{eff}} = 2\rho A g$ .

[b] Met wrijvingskracht wordt de bewegingsvergelijking voor dit systeem

$$M\ddot{x} = -mg - wL\dot{x}$$

Ofwel

$$\ddot{x} + \frac{w}{\rho A}\dot{x} + \frac{2g}{L}x = 0$$

Definieer de volgende constanten: $2\gamma = w/\rho A$ en $\omega_0^2 = 2g/L$, zodat:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Probeer als oplossing:

$$x(t) = A\exp(qt)$$

Invullen geeft:

$$\left(q^2 + 2\gamma q + \omega_0^2\right)A\exp(qt) = 0\,.$$

De kwadratische vergelijking in $q$ heeft in de meeste gevallen twee oplossingen

$$q_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,.$$

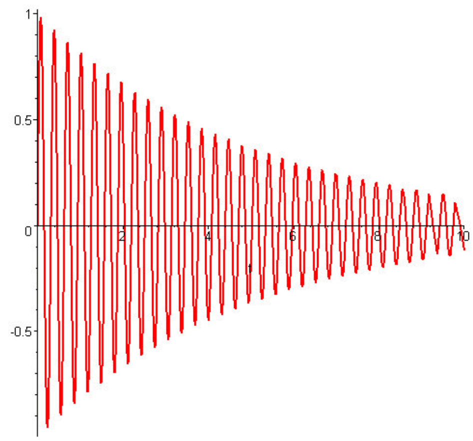
We kunnen drie gevallen onderscheiden:

(1) Onderdemping: $\gamma^2 < \omega_0^2$

Dan is de oplossing complex. Gebruik $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\omega_d$ als definitie voor een gedempte trillingsfrequentie. De meest algemene oplossing voor dit geval wordt dan:

$$x(t) = A\exp(-\gamma t)\exp(-i\omega_d t) + B\exp(-\gamma t)\exp(+i\omega_d t)$$

De functie ziet er, afhankelijk van beginvoorwaarden, als volgt uit:



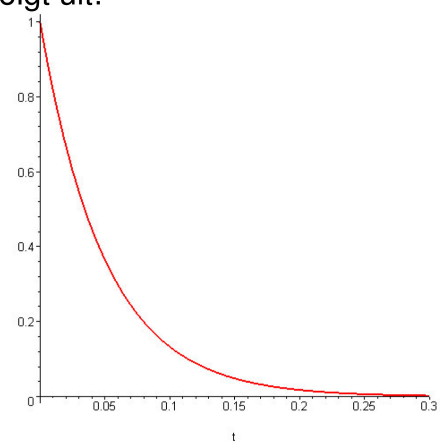

De oplossing is een oscillerende beweging die geleidelijk uitdempt.

(2) Overdemping: $\gamma^2 > \omega_0^2$

Dan is de oplossing reëel. Gebruik $\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ als definitie voor de additionele dempingfactor. De meest algemene oplossing voor dit geval wordt dan:

$$x(t) = A\exp(-(\gamma+\Gamma)t) + B\exp(-(\gamma-\Gamma)t)$$

De functie gaat snel en zonder oscillaties naar nul en ziet er, afhankelijk van beginvoorwaarden, als volgt uit:




(3) Kritische demping: $\gamma^2 = \omega_0^2$

In dit geval levert de kwadratische vergelijking slechts één onafhankelijke oplossing:

$$x(t) = A\exp(-\gamma t)$$

Een tweede orde D.V. heeft altijd twee onafhankelijke oplossingen en om de andere te vinden moeten we terug naar de oorspronkelijke D.V. onder substitutie van $\gamma^2 = \omega_0^2$:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x = 0$$

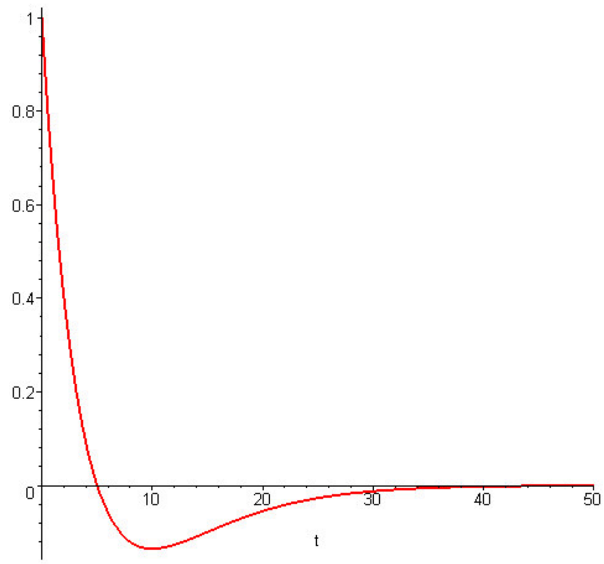
Probeer de oplossing:

$$x(t) = Bt\exp(-\gamma t)$$

Die voldoet inderdaad (laten zien door invullen), zodat de meest algemene oplossing wordt:

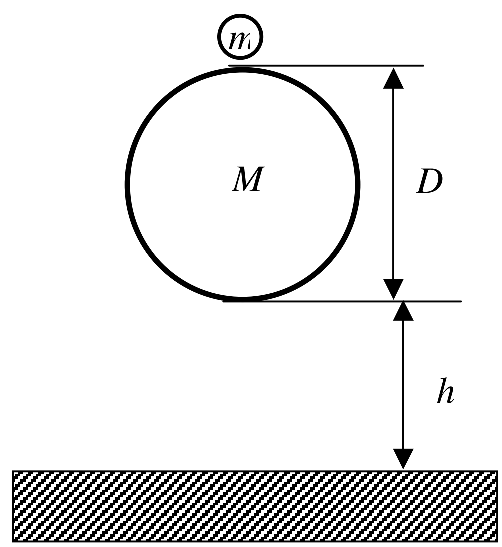
$$x(t) = A\exp(-\gamma t) + Bt\exp(-\gamma t)$$

De beweging vertoont hooguit één oscillatie en komt snel tot evenwicht. De functie ziet er, afhankelijk van beginvoorwaarden, als volgt uit:




De oplossing komt snel tot evenwicht, na hooguit één nuldoorgang.

**3.** [a] De ballen worden losgelaten op een hoogte $h$ boven de grond. Het verschil in potentiële energie is $Mgh$ voor de voetbal en $mgh$ voor de tennisbal. Dit wordt omgezet in kinetische energie van $\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{v}}^2$, respectievelijk $\frac{1}{2}mv_{\mathrm{t}}^2$. De snelheid van de ballen op het moment dat de voetbal de grond raakt is dus gelijk, en wordt gegeven door $v_0 = \sqrt{2gh}$




[b] Wanneer we veronderstellen dat de voetbal eerst met de grond botst voordat de ballen onderling botsen, dan geldt zodra de voetbal loskomt van de grond: de tennisbal heeft nog steeds snelheid $v_1 = v_0$, maar die van de voetbal is omgekeerd: $v_2 = -v_0$

[c] De snelheid van de tennisbal na de onderlinge botsing van de twee ballen kan worden berekend uit de wetten voor behoud van energie (elastische botsing) en impuls (geen externe krachten). Dit geeft twee vergelijkingen met twee onbekenden (de snelheden na de botsing), dus dit probleem is oplosbaar.

Impulsbehoud: $mv_1 + Mv_2 = mv_1' + Mv_2'$ waarin de snelheden na de botsing met accenten worden aangegeven.

Dus met [b]: $mv_0 - Mv_0 = mv_1' + Mv_2'$

Herschrijf dit als $M(v_2' + v_0) = m(v_0 - v_1')$ (1)

Energiebehoud: $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_2'^2$

Dus met [b]: $mv_0^2 + Mv_0^2 = mv_1'^2 + Mv_2'^2$

Herschrijf dit weer: $m(v_0^2 - v_1'^2) = M(v_2'^2 - v_0^2)$

$$m(v_0 - v_1')(v_0 + v_1') = M(v_2' - v_0)(v_2' + v_0)$$

Gebruik het resultaat (1) om de eerste factoren links te vervangen en de vergelijking te schrijven als:

$$M(v_2' + v_0)\cdot(v_0 + v_1') = M(v_2' - v_0)(v_2' + v_0)$$

Dit vereenvoudigt tot

$$v_0 + v_1' = v_2' - v_0$$

Ofwel $\boxed{v_2' = v_1' + 2v_0}$

Dit substitueren we terug in (1):

$$M(v_1' + 2v_0 + v_0) = m(v_0 - v_1')$$

Waaruit we $v_1'$ kunnen oplossen.

$$\boxed{v_1' = -\frac{3M - m}{M + m}v_0}.$$

[d] Wanneer we $m$ veel kleiner dan $M$ veronderstellen nadert $v_1'$ naar drie maal de snelheid vóór stuiteren.

[e] De kinetische energie is op het hoogste punt weer volledig omgezet in potentiële energie. De hoogte die de tennisbal wint <u>ten opzichte van het punt van stuiteren</u> wordt dus gegeven door

$$\tfrac{1}{2}mv_1'^2 = mgh'.$$

Ofwel maximaal $h' = v_1'^2/2g = 9v_0^2/2g$.

Met het resultaat uit [a] volgt

$$h' = \frac{9\cdot 2gh}{2g} = 9h.$$

De bal kan negen maal zo hoog komen. (Ten opzichte van de grond bereikt de bal een hoogte $9h + D$)

Dit is niet in strijd met behoud van energie (die wet hebben we immers toegepast in de afleiding). De grotere snelheid van de tennisbal gaat ten koste van kinetische energie van de voetbal.

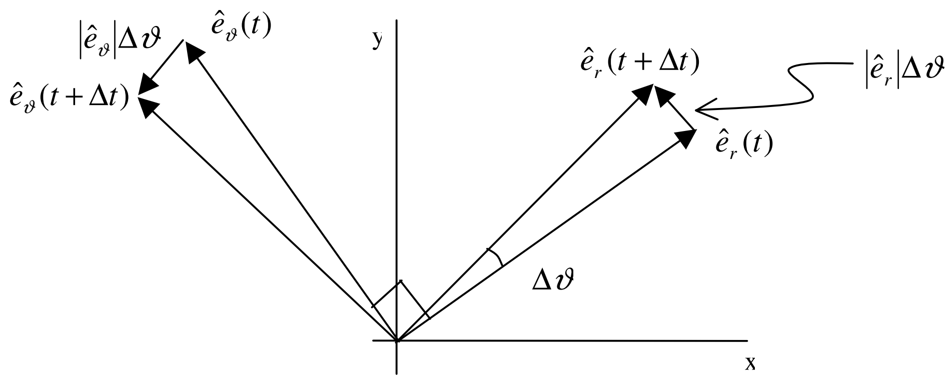
[f] Voor het geval van twee gelijke ballen, $M = m$, wordt de snelheid van de bovenste bal (invullen in het resultaat van [c]: $v_1' = -v_0$.

Inderdaad, voor elastische botsing van gelijke massa's worden de snelheden uitgewisseld.

**4.** [a] De beweging van de kogel $\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r(t)$ kan worden beschreven met poolcoördinaten in het vlak van de tafel, waarbij $\hat{e}_r$ de eenheidsvector parallel aan $\vec{r}$ is. De snelheidsvector kunnen we dan als volgt afleiden

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

De afgeleide van de eenheidsvector kan worden geïllustreerd voor een korte tijdsverandering $\Delta t$




De lengte verandert niet (blijft 1), alleen de richting.
Daarmee wordt

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\hat{e}_r(t+\Delta t) - \hat{e}_r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\hat{e}_r|\Delta\vartheta\,\hat{e}_\vartheta}{\Delta t} = \dot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta$$

We vinden dus

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta$$

Voor de versnelling moeten we deze uitdrukking nogmaals differentiëren.

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\,\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta + r\ddot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta + r\dot{\vartheta}\,\frac{d\hat{e}_\vartheta}{dt}$$

Analoog aan de afleiding boven krijgen we:

$$\frac{d\hat{e}_\vartheta}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\hat{e}_\vartheta(t+\Delta t) - \hat{e}_\vartheta(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\hat{e}_\vartheta|\Delta\vartheta(-\hat{e}_r)}{\Delta t} = -\dot{\vartheta}\,\hat{e}_r$$

Dus

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta + \dot{r}\dot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta + r\ddot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta - r\dot{\vartheta}^2\,\hat{e}_r$$

of

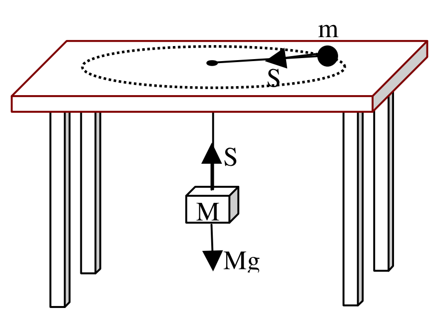
$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\hat{e}_\vartheta . \qquad \text{QED}$$

[b] Voor het blok met massa $M$ geldt:

$$M\,\ddot{z} = -Mg + S$$

waarin $z$ de verticale coördinaat is, en de positieve as naar boven is gekozen. $S$ is de spankracht in het touw.
Voor de kogel geldt:

$$m\ddot{\vec{r}} = -S\,\hat{e}_r$$



We krijgen dus een stelsel differentiaalvergelijkingen

$$M\,\ddot{z} = -Mg + S$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) = -S$$

$$m(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}) = 0$$

[c] De laatste vergelijking heeft de vorm van een behoudswet.
Het impulsmoment is

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = m(r\hat{e}_r) \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta) = mr^2\dot{\vartheta}(\hat{e}_r \times \hat{e}_\vartheta) = mr^2\dot{\vartheta}\,\hat{e}_z$$

De tijdsafgeleide hiervan is

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\vartheta})\,\hat{e}_z + mr^2\dot{\vartheta}\frac{d}{dt}\,\hat{e}_z$$

De laatste term is nul omdat de z-as niet beweegt. We vinden

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (2mr\dot{r}\dot{\vartheta} + mr^2\ddot{\vartheta})\,\hat{e}_z = mr(2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\,\hat{e}_z\,.$$

Deze is nul op grond van de laatste vergelijking in [b] en het impulsmoment is dus behouden.

[d] De kinetische energie is

$$T = \tfrac{1}{2}M\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \tfrac{1}{2}M\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2)$$

Het touw heeft een vaste lengte $\ell$. Dus $\ell = r - z$ en, via differentiëren vinden we dat $\dot{r} = \dot{z}$.

Dus $\quad T = \tfrac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2$

Gebruik nu dat het impulsmoment een constante is, dus $\dot{\vartheta} = \dfrac{L}{mr^2}$ hangt alleen van de straal van de baan af: $T = \tfrac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2 + \dfrac{L^2}{2mr^2}$.

De potentiële energie is alleen die van het blok, $V = Mgz = Mgr - Mgl$

Totaal:

$$E = T + V = \text{const.}$$

of

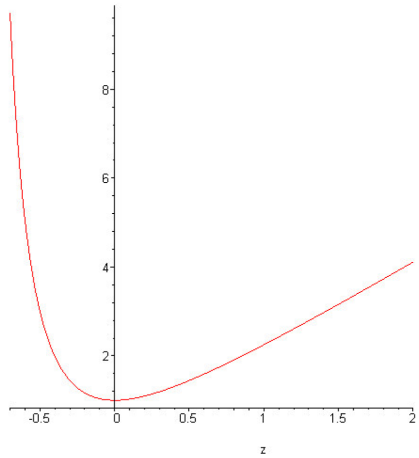
$$\tfrac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + Mgr = E + Mgl = \text{const.} \qquad \text{QED.}$$

[e] Voor het blok geldt, op grond van bovenstaande vergelijking, en met gebruikmaking van $\ell = r - z$,

$$\tfrac{1}{2}(M+m)\dot{z}^2 + \frac{L^2}{2m(l+z)^2} + Mgz = \text{const.}$$

De effectieve potentiële energie is $U_{\text{eff}} = \dfrac{L^2}{2m(l+z)^2} + Mgz$. Deze functie divergeert voor $z = -l$ en stijgt lineair voor grote waarden van $z$.

De functie ziet er uit als:




De evenwichtspositie is het minimum van de effectieve potentiële energie, immers, daar is geen energie meer beschikbaar voor de z-beweging van het blok.

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{L^2}{m(l+z)^3} + Mg = 0$$

dus

$$z = \sqrt[3]{\frac{L^2}{mMg}} - l\,.$$

Voor kleine $L$ nadert $z$ naar $-l$, zoals je zou verwachten. Voor grote $L$ komt het evenwichtspunt hoger te liggen

Dimensieanalyse: $\left[\frac{L^2}{m^2 g}\right] = \frac{(m \cdot kg \cdot m/s)^2}{kg^2 m/s^2} = \frac{m^4 \cdot kg^2 \cdot s^{-2}}{kg^2 \cdot m \cdot s^{-2}} = m^3$ OK.

[f] Voor kleine uitwijkingen rond evenwicht kan $U_{\text{eff}}$ benaderd worden als een parabool. De beweging van een deeltje in een parabolische potentiaal is een harmonische oscillatie. De kogel zal dan een cirkelbaan beschrijven van oscillerende straal. De beweging zal in het algemeen niet meer periodiek zijn.