Uitwerking tentamen Klassieke Mechanica 1

9 augustus 2007

Opgave 1

a. Omdat $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ geldt dat $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Dus $\mathbf{L}$ is behouden als $\mathbf{F} \| \mathbf{r}$, ofwel als de kracht centraal is.

b. De energie ($E = T + V$) is behouden als de kracht geschreven kan worden als $\mathbf{F} = -\nabla V$. Dat is het geval als $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Dan is de kracht conservatief.

c. De impuls voldoet aan $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$. Dus de impuls is behouden als $\mathbf{F} = 0$, dus als de kracht nul is.

Opgave 2.

a. Bij een hoeksnelheid ω is de centripetale versnelling gelijk aan $\omega^2 a$. Dat moet gelijk zijn aan de versnelling door de zwaartekracht GM/a^2, zodat $\omega = \sqrt{GM/a^3}$.

b. De baansnelheid is ωa, dus het impulsmoment van de satelliet heeft de grootte $L = mav = ma^2\omega = m\sqrt{aGM}$.

c. De kinetische energie is $T = mv^2/2 = m\omega^2 a^2/2 = mGM/(2a)$.

d. De potentiële energie is $V = -mGM/a$, zodat de totale energie $E = T + V = -mGM/(2a)$ bedraagt.

e. In een baan met lagere (meer negatieve) waarde van E moet a kleiner zijn, zodat de snelheid $v = \sqrt{GM/a}$ groter wordt.

Opgave 3.

a. In het zwaartepuntsstelsel geldt dat $m_1\bar{\mathbf{r}}_1 + m_2\bar{\mathbf{r}}_2 = 0$. Bovendien geldt $\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{R}$. Oplossen van $\bar{\mathbf{r}}_1$ en $\bar{\mathbf{r}}_2$ uit deze twee vergelijkingen geeft $\bar{\mathbf{r}}_1 = m_2\mathbf{R}/m$ en $\bar{\mathbf{r}}_2 = -m_1\mathbf{R}/m$, met $m = m_1 + m_2$.

b. De kinetische energie is $T = m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2/2 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2/2$. Invullen van de uitdrukkingen uit a. geeft dan $T = (m_1(m_2/m)^2 + m_2(m_1/m)^2)\,\dot{\mathbf{R}}^2/2 = \mu\dot{\mathbf{R}}^2/2$ met $\mu = m_1m_2/m$ (de gereduceerde massa).

c. Het impulsmoment is $\mathbf{L} = m_1\bar{\mathbf{r}}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\bar{\mathbf{r}}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2$. Invullen van de uitdrukkingen uit a. geeft dan $\mathbf{L} = (m_1(m_2/m)^2 + m_2(m_1/m)^2)\,\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2 = \mu\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$.

Opgave 4.

a. De reiziger beweegt door de cabine met z' als zijn vertikale coördinaat in het stelsel van de cabine. In het stelsel van de Aarde is zijn coördinaat z. Dan geldt $z = z' + Z$, met Z de vertikale coördinaat van de cabine. Door te differentiëren naar de tijd vinden we dan $v(t) = v'(t) + V(t)$.

b. De Tweede Wet van Newton geeft voor de reiziger (in het stelsel van de Aarde) $m\dot{v} = -mg + F$. Uit a. volgt dat $\dot{v} = \dot{v}' + \dot{V}$, zodat de bewegingsvergelijking voor v' luidt $m\dot{v}' = -mg + F - m\dot{V}$. (We zien $-m\dot{V}$ als extra traagheidskracht verschijnen.)

c. Voor de cabine geldt de bewegingsvergelijking $M\dot{V} = -Mg - cV$.

d. De oplossing van deze bewegingsvergelijking bij $V(0) = 0$ is
$V(t) = -(Mg/c)(1 - e^{-ct/M})$.

e. Als $v' = 0$ dan vinden we uit b. dat $0 = -mg + F - m\dot{V}$, zodat de kracht die de cabine op de reiziger uitoefent gegeven is door $F = mg + m\dot{V} = mg - mge^{-ct/M}$. De reiziger drukt met deze zelfde kracht $F(t)$ op de bodem van de cabine, en bepaalt daarmee het gewicht dat een weegschaal zou aangeven. Deze kracht begint bij 0, en stijgt dan naar de eindwaarde mg. Het gewicht van de reiziger stijgt dus van de beginwaarde 0 naar zijn normale eindwaarde.