Uitwerking tentamen Klassieke Mechanica 1

18 juni 2007

Opgave 1

a. De padlengte van de massa is $s = l\theta$, en de component van de zwaartekracht langs het pad is $-mg\sin\theta$. De Tweede Wet van Newton geeft dan de gevraagde bewegingsvergelijking $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$.

b. Bij kleine θ geldt dat $\sin\theta \approx \theta$ zodat de bewegingsvergelijking wordt $\ddot{\theta} = -(g/l)\theta$. Dit is de vergelijking voor een harmonische oscillator $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$, met $\omega = \sqrt{g/l}$.

c. Slingertijd $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$.

d. De transformatie van de vertikale positie in het ruststelsel naar het stelsel van de lift geeft $z = z' + at^2/2$, zodat de vergelijking voor een vertikale val wordt $\ddot{z} = -g = \ddot{z}' + a$. In het stelsel van de lift wordt g dus vervangen door $g + a$, zodat de bewegingsvergelijking voor de slinger in de lift wordt $ml\ddot{\theta} = -m(g + a)\sin\theta$.

e. De slingerfrequentie wordt dus $\omega' = \sqrt{(g + a)/l}$, en de slingertijd wordt $T' = 2\pi\sqrt{l/(g + a)}$. De slingertijd wordt dus korter, de klok loopt sneller.

Opgave 2.

a. De kracht is centraal. Bij een willekeurige beginsituatie $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ ligt de versnelling in het vlak dat opgespannen wordt door $\mathbf{r}_0$ en $\mathbf{v}_0$. Dus $\mathbf{r}(t)$ kan nooit buiten dit vlak komen.

b. De oplossing bij de gegeven beginvoorwaarden is $x(t) = a\cos(\omega t)$, $y(t) = (v_0/\omega)\sin(\omega t)$.

c. De oplossing voldoet aan $x^2/a^2 + y^2\omega^2/v^2 = 1$. Dit is de vergelijking voor een ellips met de oorsprong als middelpunt, en halve assen a (langs de x-as), en v/ω (langs de y-as).

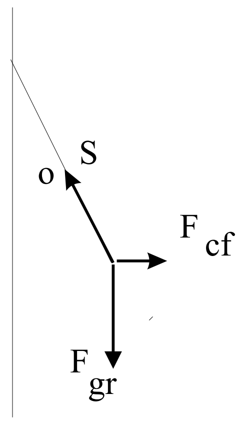
d. Omdat de kracht centraal is het impulsmoment $L = mr^2\dot{\theta}$ behouden. Dus is ook $\dot{A} = r^2\dot{\theta}/2 = L/(2m)$ behouden.

e. Als de baan de x-as passeert ($x = a$) staat de snelheid $\dot{y} = v$ langs de y-as, dus $\dot{A} = av/2$. Als de baan de y-as passeert ($y = v/\omega$) staat de snelheid $\dot{x} = \omega a$ langs de x-as, dus opnieuw geldt $\dot{A} = (v/\omega)(\omega a)/2 = av/2$.

f. De oppervlakte van de ellips is $A = \pi av/\omega$, en de omlooptijd is $\tau = 2\pi/\omega$, dus $A/\tau = av/2$.

Opgave 3.

a. Op de steen werken de zwaartekracht $\mathbf{F}_{gr}$, met grootte mg, de centrifugaalkracht $\mathbf{F}_{cf}$ met grootte $m\Omega^2 L \sin\theta_0$, en de spanning in het koord $\mathbf{S}$, die de beide andere compenseert.



b. De totale kracht verdwijnt. Horizontale component geeft $S\sin\theta_0 = m\Omega^2 L \sin\theta_0$, dus $S = m\Omega^2 L$.

c. Vertikale component geeft $S\cos\theta_0 = mg$, zodat $\cos\theta_0 = g/(\Omega^2 L)$ kleiner dan 1 moet zijn, ofwel $\Omega > \sqrt{g/L}$.

d. Dat geeft $\theta_0 = \cos^{-1}(g/(\Omega^2 L))$.

e. $F_{cf} = m\Omega^2 L \sin\theta_0 = m\sqrt{\Omega^4 L^2 - g^2}$.