

# Tentamen Klassieke Mechanica 1

18 juni 2007

## Opgave 1

In deze opgave bekijken we een slingerklok in verschillende situaties. De slinger heeft een lengte  $l$  en de massa aan het eind van de staaf heeft de grootte  $m$ . De uitwijkhoek noemen we  $\theta$ . De slinger bevindt zich in het aardse zwaartekrachtsveld, dat beschreven wordt door de versnelling  $g$  vertikaal naar beneden.

- Beargumenteer kort dat de slinger beschreven wordt door de bewegingsvergelijking  $ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$ .
- Laat zien dat dit de vergelijking van de harmonische oscillator geeft als  $\theta$  voldoende klein blijft.
- Geef een uitdrukking voor de slingertijd  $T$  van het uurwerk.

Nu bekijken we de situatie dat de klok in een lift is gezet, die met versnelling  $a$  omhoog beweegt.

- Leid de bewegingsvergelijking voor  $\theta$  in deze situatie af (eerst nog voor willekeurige uitwijkhoek, als generalisatie van a.).
- Bepaal ook in dit geval de slingertijd  $T'$  van de klok als de uitwijkhoek  $\theta$  klein blijft. Loopt de klok sneller of langzamer in de lift?

## Opgave 2.

We beschouwen een isotrope harmonische oscillator, beschreven door de kracht  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m\omega^2\mathbf{r}$ .

- Beargumenteer dat de baan van de oscillator in een vlak ligt.

We nemen het baanvlak als het  $xy$ -vlak.

- Geef een oplossing  $x(t)$  en  $y(t)$  van de bewegingsvergelijkingen bij de beginvoorwaarden  $x(0) = a$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = v$ .
- Laat zien dat bij deze oplossing de baan een ellips is met de oorsprong in het middelpunt, en met de assen in de  $x$ - en de  $y$ -richting. Geef de grootte van de beide assen.

- d. Beargumenteer kort dat voor de beweging van de oscillator in het baanvlak de Tweede Wet van Kepler (de perkenwet) geldt.
- e. Bepaal (in termen van de gegeven parameters  $a$  en  $v$ ) de grootte van het door de voerstraal doorlopen oppervlak per tijdeenheid  $\dot{A} = dA/dt$  voor de punten van de baan op de  $x$ -as en de  $y$ -as, en verifieer dat deze groottes hetzelfde zijn.
- f. Laat zien dat  $\dot{A}$  inderdaad gelijk is aan  $A/\tau$ , met  $A$  het oppervlak van de ellips, en  $\tau$  de omlooptijd.

### Opgave 3.

Een horizontale draaitafel draait om een verticale as met hoeksnelheid  $\Omega$ . Een steen met massa  $m$  is verbonden aan een koord met lengte  $L$ , dat is opgehangen aan een meedraaiend ophangpunt op de draaias. Op de steen werkt ook de zwaartekracht, met de constante versnelling  $g$ . De hoek die het koord maakt met de vertikaal noemen we  $\theta$ . Een mogelijke situatie is dan dat het koord eenvoudig vertikaal hangt ( $\theta = 0$ ), en samen met de steen meedraait. In dat geval is de spanning in het koord gelijk aan  $mg$ . (De spanning in het koord is hetzelfde als de grootte van de kracht die het koord op de steen uitoefent.) We willen nagaan onder welke voorwaarden er ook een stationaire situatie is waarin het koord en de steen in rust zijn in het draaiende stelsel, bij een vaste uitwijkhoek  $\theta_0$  die niet nul is. Gezien vanuit het ruststelsel beschrijft de steen in dat geval dus een horizontale cirkel met straal  $L \sin \theta_0$ . De kracht die het koord op de steen uitoefent noemen we  $\mathbf{S}$ .

- a. Aannemend dat zo'n stationaire situatie bestaat, welke krachten werken dan op de steen, gezien vanuit het meedraaiende stelsel (waarin de steen dus in rust is)? Geef een schets van deze krachten.
- b. Ga uit van het horizontale krachtenevenwicht, en vind een uitdrukking voor de spanning  $S$  in het koord als functie van  $\Omega$  en  $L$ .
- c. Ga nu uit van het verticale krachtenevenwicht. Ga na aan welke voorwaarde  $\Omega$  moet voldoen zodat er een waarde van  $\theta_0$  te vinden is.
- d. Bepaal de waarde van  $\theta_0$ .
- e. Geef een uitdrukking voor de centrifugale kracht als functie van  $\Omega$  en  $L$  in deze stationaire situatie.