Tentamen Klassieke Mechanica 1

9 juni 2008

Opgave 1
Een voorwerp ondervindt een kracht $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ die alleen van de plaats afhangt. De kracht wordt gegeven door zijn componenten

$$F_x = -Ax - By \ , \ F_y = -Cx - Dy \ , \ F_z = -Gz \ ,$$

waarin A, B, C, D en G positieve constanten zijn.

a. Geef aan aan welke voorwaarden deze constanten moeten voldoen zodat de kracht $\mathbf{F}$ conservatief is.

b. Vind in dit geval van een conservatieve kracht een uitdrukking voor de potentiële energie $V(\mathbf{r})$.

c. Geef aan aan welke voorwaarden deze constanten moeten voldoen zodat de kracht $\mathbf{F}$ centraal is.

d. Beargumenteer kort dat in dit geval c. de beweging van het voorwerp ligt in een vlak door de oorsprong.

e. Beargumenteer kort of in dit geval c. de Tweede Wet van Kepler (de Perkenwet, '*the constancy of areal velocity*') geldt.

Opgave 2.
Eerst bekijken we het geval van een cirkelvormige baan van een planeet met massa m om de zon, met impulsmoment $L = ml$. De constante k bepaalt de potentiële energie $V = -k/r$.

a. Leid (bij gegeven waarde van l) een uitdrukking af voor de straal r van de baan en voor de snelheid v van de planeet.

b. Geef een uitdrukking voor de verhouding T/V van de kinetische en de potentiële energie.

Nu kijken we naar ellipsvormige banen van de planeet. De vorm van de ellips wordt bepaald door twee parameters. Daarvoor kunnen we kiezen het impulsmoment $l = L/m$, en de excentriciteit ϵ. Het punt van de baan dat het verste van de zon afstaat heet het apohelium, het punt dat het dichtste bij de zon staat is het perihelium. De vergelijking voor de baan in poolcoördinaten kan dan in de gebruikelijke notatie geschreven worden als

$$r = \frac{ml^2/k}{1 + \epsilon \cos\theta} \ ,$$

met r de voerstraal en θ de azimuthhoek. In het perihelium geldt dus $\theta = 0$. U mag deze vergelijking zonder afleiding gebruiken.

c. Leid hieruit uitdrukkingen af voor de lengte van de voerstraal r_a in het apohelium, de voerstraal r_p in het perihelium, en de halve lange as a van de ellipsbaan, alle in termen van de gegeven parameters l en ϵ.

d. Geef uitdrukkingen voor de snelheden v_a en v_p van de planeet in het apohelium en het perihelium.

e. Geef een uitdrukking voor de verhouding T/V van de kinetische en de potentiële energie, zowel in apohelium als perihelium.

Opgave 3.
Eerst bekijken we het geval van een voorwerp met massa m, dat met snelheid $\mathbf{v}$ beweegt in een horizontaal vlak. Het ondervindt een kracht $\mathbf{F}$, met een constante grootte F, en een richting die steeds loodrecht staat op de snelheid. Daarmee ligt de vorm van de baan vast.

a. Beargumenteer dat de baan van het voorwerp een cirkel is, en geef de straal van deze cirkel als functie van v en F.

Nu nemen we het speciale geval dat het voorwerp beweegt (nog steeds met snelheid v) in het horizontale vlak op Aarde, in een gebied met breedtegraad λ ($\lambda = 0$ op de Evenaar, $\lambda = \pi/2$ op de Noordpool). De rotatiesnelheid van de Aarde noemen we ω.

b. Laat zien dat de horizontale component van de Corioliskracht op het voorwerp de grootte $2m\omega v \sin\lambda$ heeft.

c. Beargumenteer dat deze horizontale component van de Corioliskracht loodrecht staat op de richting van de (horizontale) snelheid.

We nemen nu aan dat de Corioliskracht de enige kracht op het voorwerp is die werkt in het horizontale vlak. (De centrifugale kracht is verwerkt in de effectieve zwaartekracht.)

d. Beargumenteer ook voor dit geval dat het voorwerp een cirkelvormige baan beschrijft, en geef de straal van de cirkel als functie van v en λ.