Uitwerking Tentamen Klassieke Mechanica 1

9 juni 2008

Opgave 1.

a. Een kracht $\mathbf{F}$ is conservatief als die alleen van de positie afhangt, en als geldt dat $\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$. Aan de eerste voorwaarde is duidelijk voldaan, en voor de rotatie geldt dat $(\vec{\nabla} \times \mathbf{F})_x = (\vec{\nabla} \times \mathbf{F})_y = 0$, $(\vec{\nabla} \times \mathbf{F})_z = \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = -C + B$. Dit is nul als $B = C$.

b. De potentiële energie $V(\mathbf{r})$ moet voldoen aan de eis dat $\vec{\nabla} V = -\mathbf{F}$. De gegeven kracht (bij $B = C$) voldoet daaraan als $V = Ax^2/2 + Dy^2/2 + Gz^2/2 + Cxy$. Daarmee is de vraag beantwoord.
We kunnen de potentiële energie ook vinden uit de lijnintegraal $V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. We kiezen het pad van de oorsprong naar het punt $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ in drie rechte stukken die elk parallel aan één van de assen staan: eerst van $\mathbf{0}$ naar $x\mathbf{i}$, dan van $x\mathbf{i}$ naar $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, en tenslotte van $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ naar $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Dat geeft drie bijdragen in de vorm $Ax^2/2$, $Cxy + Dy^2/2$ en $Gz^2/2$, die met elkaar dezelfde uitdrukking geven voor $V(\mathbf{r})$.

c. Een kracht $\mathbf{F}$ is centraal als die steeds evenwijdig is aan $\mathbf{r}$. Dat is alleen het geval als $A = D = G$, en $B = C = 0$, zoals bijvoorbeeld kan worden nagegaan door te eisen dat $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Daarmee vinden we de potentiële energie $V = A\mathbf{r}^2/2$ van de isotrope harmonische oscillator.

d. Zoals altijd ligt de baan vast met de beginpositie $\mathbf{r}(0)$ en de beginsnelheid $\mathbf{v}(0)$, die samen een vlak door de oorsprong bepalen. Omdat de (centrale) kracht $\mathbf{F}$ in dit zelfde vlak ligt, kan ook de versnelling geen component buiten dit vlak hebben, zodat plaats en snelheid steeds in dit vlak blijven.

e. Bij een centrale kracht geldt behoud van impulsmoment. Omdat dit equivalent is met de Perkenwet van Kepler geldt deze wet inderdaad voor dit geval c.

Opgave 2.

a. In een cirkelbaan staat de snelheid steeds loodrecht op de voerstraal, zodat $l = vr$, ofwel $v = l/r$. De centripetale versnelling $mv^2/r = ml^2/r^3$ moet gelijk zijn aan de grootte van de centrale kracht k/r^2. Daaruit volgt dat $r = ml^2/k$, en $v = k/(ml)$.

b. De potentiële energie is daarmee $V = -k/r = -k^2/(ml^2)$, en de kinetische energie $T = mv^2/2 = k^2/(2ml^2)$. Dat geeft de verhouding $T/V = -1/2$.

c. De voerstralen r_p en r_a in het perihelium en het apohelium vinden we door invullen van de azimuthhoeken $\theta = 0$ en $\theta = \pi$. De halve lange as a volgt dan uit $r_p + r_a = 2a$. Dit geeft

$$r_p = \frac{ml^2/k}{1+\epsilon}\ ,\ r_a = \frac{ml^2/k}{1-\epsilon}\ ,\ a = \frac{ml^2/k}{1-\epsilon^2}\ .$$

d. In perihelium en apohelium staat de snelheid loodrecht op de voerstraal, zodat $l = r_p v_p = r_a v_a$. Dat geeft

$$v_p = \frac{1+\epsilon}{ml/k}\ ,\ v_a = \frac{1-\epsilon}{ml/k}\ .$$

e. De kinetische energieën T_p en T_a in peri- en apohelium zijn dus

$$T_p = \frac{k^2}{2ml^2}(1+\epsilon)^2\ ,\ T_a = \frac{k^2}{2ml^2}(1-\epsilon)^2\ ,$$

en de potentiële energieën V_p en V_a zijn

$$V_p = -\frac{k^2}{ml^2}(1+\epsilon)\ ,\ V_a = -\frac{k^2}{ml^2}(1-\epsilon)\ .$$

De gevraagde verhoudingen zijn daarmee $T_p/V_p = -(1-\epsilon)/2$ en $T_a/V_a = -(1+\epsilon)/2$.

Opgave 3.

a. Als de kracht $\mathbf{F}$ steeds loodrecht staat op de snelheid $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, dan geldt $dv^2/dt = d\mathbf{v}^2/dt = 2\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 0$, zodat de snelheid een constante grootte v heeft. Een baan met constante v en constante F met $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ is een cirkel met straal r zodanig dat $mv^2/r = F$. Dus $r = mv^2/F$.

b,c. De Corioliskracht is $-2m\vec{\omega}\times\mathbf{v}$. We splitsen $\vec{\omega} = \vec{\omega}_v + \vec{\omega}_h$ in een vertikale (v) en een horizontale (h) component. Op de breedtegraad λ heeft de verticale component van $\vec{\omega}$ de grootte $\omega \sin\lambda$, en de horizontale (langs de meridiaan gerichte) component $\omega\cos\lambda$. Bij een horizontale snelheid $\mathbf{v}$ is $\vec{\omega}_h \times \mathbf{v}$ vertikaal, en $\vec{\omega}_v \times \mathbf{v}$ horizontaal. Omdat $\vec{\omega}_v$ loodrecht staat op $\mathbf{v}$ staat de horizontale component van de Corioliskracht loodrecht op $\mathbf{v}$, en heeft de grootte $2m\omega v \sin\lambda$.

d. De horizontale beweging van het voorwerp voldoet dus precies aan de condities onder a., met $F = 2mv\omega \sin\lambda$. Het voorwerp beweegt dus eenparig langs een cirkel, met straal $r = mv^2/F = v/(2\omega\sin\lambda)$.