

Tentamen Klassieke Mechanica 1

8 juni 2009

Opgave 1

Een anisotrope harmonische oscillator met massa m beweegt in het xy -vlak onder invloed van een teruggedrijvende kracht met een verschillende krachtsconstante voor de twee bewegingsrichtingen. De bewegingsvergelijkingen zijn gegeven als $m\ddot{x} = -kx$, $m\ddot{y} = -4ky$. Het impulsmoment staat dan in de z -richting, en we noemen de z -component van het impulsmoment L .

- Laat zien dat de kracht conservatief is, en geef een uitdrukking voor de potentiële energie $V(x, y)$.
- Geef een uitdrukking voor de tijdsafgeleide dL/dt van de z -component van het impulsmoment als functie van x en y .
- Geef de oplossing voor $x(t)$ en voor $y(t)$ bij de beginvoorwaarden $x(0) = a$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0$.
- Laat zien dat de baan van de oscillator zichzelf na een vaste tijdsperiode T herhaalt, en geef de waarde van deze periode.
- Geef voor de onder c. gevonden oplossing een uitdrukking voor $L(t)$, en laat zien dat de afgeleide overeenkomt met wat bij b. gevonden is.

Opgave 2.

De vorm van de ellipsbaan van een planeet met massa m in zijn baan om een ster met massa M wordt bepaald door twee parameters. Daarvoor kiezen we $l = L/m$ (met L het impulsmoment), en de excentriciteit ϵ . Alle gevraagde uitdrukkingen dienen dus te worden gegeven in termen van l en ϵ . De vergelijking voor de baan in poolcoördinaten kan dan (in de gebruikelijke notatie) geschreven worden als

$$r = \frac{l^2}{GM} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta}.$$

We nemen aan dat $M \gg m$, zodat de beweging van de ster mag worden verwaarloosd. Verder mag u zonder verder bewijs gebruiken, dat voor het door de voerstraal doorlopen oppervlak A geldt dat $dA/dt = l/2$ (de Tweede Wet van Kepler, ofwel de Perkenwet).

- Bepaal de halve lange as a en de halve korte as b van de ellipsbaan.

- b. Geef de oppervlakte van de ellipsbaan.
- c. Geef een uitdrukking voor de omlooptijd τ van de planeet.

De korte as van de ellips deelt de baan in twee delen van gelijke lengte. Deel I is het baandeel dat het dichtst bij de zon staat, en deel II is het andere deel. De looptijd van de planeet voor die beide delen duiden we aan als τ_I en τ_{II} .

- d. Geef een uitdrukking voor de verhouding τ_I/τ_{II} .
- e. Geef een vergelijking waar de hoek θ aan voldoet op de momenten dat de planeet in zijn baan de korte as passeert.

Opgave 3

Een granaat wordt afgeschoten vanaf de grond met een beginsnelheid $v_{x0}\mathbf{i} + v_{z0}\mathbf{k}$, waar \mathbf{k} de vertikaal aangeeft. De granaat beweegt met verwaarloosbare luchtweerstand. De versnelling door de zwaartekracht is $-g\mathbf{k}$.

- a. Bereken de maximale hoogte van de baan, en de snelheid van de granaat op maximale hoogte.

Op het hoogste punt van de baan valt de granaat uiteen in twee delen met gelijke massa. Gegeven is dat een deel onmiddellijk na het uiteenvallen beweegt met snelheid $\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{k}$ vertikaal omhoog. Vervolgens vallen beide fragmenten met verwaarloosbare luchtweerstand onder invloed van alleen de zwaartekracht.

- b. Beargumenteer dat bij het uiteenvallen de snelheid van het zwaartepunt niet verandert. Bereken de snelheid \mathbf{v}_2 van het andere deel van de granaat onmiddellijk na het uiteenvallen.
- c. Bereken de relatieve snelheid van de beide fragmenten.
- d. Bereken de winst aan energie bij het uiteenvallen.
- e. Bereken de afstand van de lanceerplek tot het punt waar deel 2 neerkomt.