Uitwerking Tentamen Klassieke Mechanica 1

8 juni 2009

Opgave 1

a. Uit de gegeven bewegingsvergelijkingen volgt dat de kracht gelijk is aan $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i} - 4ky\mathbf{j}$. Deze zelfde kracht is ook gelijk aan $-\vec{\nabla}V$ met de potentiële energie $V(x, y) = kx^2/2 + 2ky^2$. Daaruit volgt ook dat de kracht conservatief is. [Alternatief argument: $\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = (\partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y)\mathbf{k} = 0$.]

b. $dL/dt = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z = xF_y - yF_x = -3ky$. Dit is gelijk aan de z-component N van het krachtmoment (ofwel de torsie).

c. De oplossing is $x(t) = a\cos(\omega t)$, $y(t) = (v_0/2\omega)\sin(2\omega t)$, bij $\omega = \sqrt{k/m}$.

d. Zoals blijkt uit de oplossing maakt de y-component twee oscillaties in de tijd $T = 2\pi/\omega$ waarin de x-component een oscillatie uitvoert. Dus T is de periode van de beweging.

e. Het impulsmoment is $L = m(x\dot{y} - y\dot{x})$. Invullen van de oplossing uit c. geeft dan $L = mav_0(\cos(\omega t)\cos(2\omega t) + \sin(\omega t)\sin(2\omega t)/2)$. Na differentiëren volgt dat $dL/dt = -(3/2)mav_0\omega\cos(\omega t)\sin(2\omega t)$. Dat is inderdaad gelijk aan $-3kx(t)y(t)$.

Opgave 2.

a. De lange as bedraagt $2a$. Dat is ook de som van de waarden van de voerstraal r_0 en r_1 bij $\theta = 0$, en $\theta = \pi$, zodat

$$r_0 = \frac{l^2}{GM}\frac{1}{1+\epsilon}\ ,\ r_1 = \frac{l^2}{GM}\frac{1}{1-\epsilon}\ .$$

Dus $2a = r_0 + r_1$, terwijl $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$. Het resultaat is

$$a = \frac{l^2}{GM}\frac{1}{1-\epsilon^2}\ ,\ b = \frac{l^2}{GM}\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\ .$$

b. De oppervlakte van de ellips is

$$A = \pi ab = \pi\frac{l^4}{G^2M^2}\frac{1}{(1-\epsilon)^{3/2}}\ .$$

c. Dit is ook gelijk aan $\tau dA/dt = \tau l/2$, zodat

$$\tau = 2\pi \frac{l^3}{G^2M^2} \frac{1}{(1-\epsilon)^{3/2}} \ .$$

[N.B. Dit klopt met de Derde Wet van Kepler $\tau^2 = 4\pi^2 a^3/(GM)$.]

d. De oppervlakte A_I horend bij het baandeel I is de helft van de ellips, met daarvan afgetrokken de oppervlakte van de gelijkbenige driehoek gevormd door de korte as als basis (met lengte $2b$) en als top het brandpunt (waar de zon staat). Deze driehoek heeft de hoogte ϵa, zodat de oppervlakte ϵab bedraagt. Dus $A_\mathrm{I} = ab(\pi/2 - \epsilon)$. Evenzo is $A_\mathrm{II} = ab(\pi/2 + \epsilon)$. Volgens de Perkenwet geldt $\tau_\mathrm{I}/\tau_\mathrm{II} = A_\mathrm{I}/A_\mathrm{II} = (\pi - 2\epsilon)/(\pi + 2\epsilon)$.

e. Uit de geometrische definitie van de ellips weten we dat bij de passage van de korte as de voerstraal gelijk aan a is, zodat

$$a = \frac{l^2}{GM} \frac{1}{1-\epsilon^2} = r(\theta) = \frac{l^2}{GM} \frac{1}{1+\epsilon\cos\theta} \ .$$

Daaruit volgt onmiddellijk de voorwaarde $\cos\theta = -\epsilon$.

Opgave 3.

a. De bewegingsvergelijkingen voor de componenten van de snelheid zijn $\dot{v}_x = 0$ en $\dot{v}_z = -g$. Oplossingen bij de gegeven beginvoorwaarden zijn $v_x(t) = v_{x0}$, $v_z(t) = v_{z0} - gt$. De hoogte volgt dan uit integratie: $z(t) = v_{z0}t - gt^2/2$. De maximale hoogte wordt bereikt als $v_z(t_\mathrm{max}) = 0$, dus als $t_\mathrm{max} = v_{z0}/g$. De maximale hoogte is dan $z(t_\mathrm{max}) = v_{z0}^2/2g$. De snelheidsvector is op dat moment $\mathbf{v}(t_\mathrm{max}) = v_{x0}\mathbf{i}$.

b. Bij het uiteenvallen werken alleen inwendige krachten, zodat de totale impuls niet verandert. Dus onmiddellijk na het uiteenvallen geldt $\mathbf{p} = m\mathbf{v}(t_\mathrm{max}) = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$. (De impulsverandering door de zwaartekracht gedurende het moment van de explosie is verwaarloosbaar.) Omdat $m_1 = m_2$ en $m_1 + m_2 = m$ geldt dat $m_1 = m_2 = m/2$. Dat geeft $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}(t_\mathrm{max}) = 2v_{x0}\mathbf{i}$, waaruit volgt dat $\mathbf{v}_2 = 2v_{x0}\mathbf{i} - v_1\mathbf{k}$.

c. De relatieve snelheid is $\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 2v_{x0}\mathbf{i} - 2v_1\mathbf{k}$.

d. De totale kinetische energie onmiddellijk na het uiteenvallen kan worden geschreven als $m\mathbf{v}^2(t_{\rm max})/2+\mu\mathbf{V}^2/2$. De eerste term is de kinetische energie behorend bij de beweging van het zwaartepunt, en die is gelijk aan de kinetische energie voor de explosie. De laatste term is de kinetische energie behorend bij de relatieve beweging van de beide fragmenten, en is dus de winst ΔE aan energie. Omdat $\mu = m_1 m_2/m = m/4$ geldt $\Delta E = m(v_1^2 + v_{x0}^2)/2$. [Uiteraard kan de totale kinetische energie ook worden berekend als de som van de energie van beide fragmenten.]

e. De horizontale verplaatsing tot aan de explosie is $v_{x0}t_{\rm max} = v_{x0}v_{z0}/g$. Na de explosie valt fragment 2 met beginsnelheid $\mathbf{v}_2$ vanaf de hoogte $h(0) = v_{z0}^2/2g$. De z-component van de snelheid op dit begintijdstip is $-v_1$, en de x-component is $2v_{x0}$. (Voor het gemak tellen we de tijd nu vanaf het moment van de explosie.) Volgens de bewegingsvergelijking voor de hoogte geldt dan $h(t) = h(0) - v_1 t - gt^2/2$. Fragment 2 valt op de grond als $h(t) = 0$. De positieve t-waarde waarbij dat gebeurt is $t = (\sqrt{v_1^2 + v_{z0}^2} - v_1)/g$. De totale horizontale verplaatsing is dus $v_{x0}v_{z0}/g + 2v_{x0}(\sqrt{v_1^2 + v_{z0}^2} - v_1)/g = (v_{x0}/g)[v_{z0} + 2\sqrt{v_1^2 + v_{z0}^2} - 2v_1]$.