Uitwerking Tentamen Klassieke Mechanica 2

27 oktober 2008

Opgave 1

a. Het voorwerp is spiegelsymmetrisch om de middelloodlijn van de verbinding tussen beide lichte kogels (met massa m). Dus moet het zwaartepunt op deze middelloodlijn liggen. Als we de oorsprong kiezen halverwege de verbindingslijn tussen beide lichte kogels, en de middelloodlijn als de z-as, dan hoeven we alleen nog maar de waarde van z_{cm} te vinden. Volgens de definitie van het zwaartepunt geldt dat $z_{cm} = \sum m_i z_i / \sum m_i$. Alleen de zware kogel draagt bij aan de teller van deze breuk, zodat deze teller $2m \times a\sqrt{3}/2$ is. De noemer is de totale massa $M = 4m$. Dus $z_{cm} = a\sqrt{3}/4$. Het zwaartepunt ligt dus op de middelloodlijn, op de halve hoogte van de driehoek.

b. De afstand tussen zwaartepunt en een lichte kogel is de schuine zijde van een driehoek met rechthoekszijden $a/2$ (de halve basis van de driehoek) en $a\sqrt{3}/4$ (de z-coördinaat van het zwaartepunt). Dus deze afstand is $l = a\sqrt{1/4 + 3/16} = a\sqrt{7}/4$.

c. In evenwicht bevindt het zwaartepunt zich recht onder de lichte kogel die als ophangpunt dient. De hoek α tussen de verticale as en de verbinding met de andere lichte kogel is dan een hoek uit de in b. genoemde driehoek. Daarvoor geldt dan $\tan\alpha = (a\sqrt{3}/4)/(a/2) = \sqrt{3}/2$. Daarmee ligt de hoek α vast. [Je mag natuurlijk ook schrijven $\cos\alpha = a/(2l) = 2/\sqrt{7}$.]

d. Het traagheidsmoment van het voorwerp voor rotaties om de gegeven as is $I = \sum_i m_i r_i^2$, met r_i de afstand tot de as. De zware kogel en één lichte kogel dragen bij, en beide hebben de afstand a tot de as. Dus $I = ma^2 + 2ma^2 = 3ma^2$.

e. De uitwijkhoek uit evenwicht noemen we θ. De bewegingsvergelijking voor deze hoek is $dL/dt = N$, ofwel $I\ddot{\theta} = -Mgl\sin\theta \approx -Mgl\theta$. Dus de oscillatiefreqentie ω voldoet aan

$$\omega^2 = Mgl/I = \frac{4mga\sqrt{7}/4}{3ma^2} = \frac{g\sqrt{7}}{3a}$$

De trillingstijd $T = 2\pi/\omega$ is dan $2\pi\sqrt{3a/(g\sqrt{7})}$

Opgave 2.

a. De componenten van de draaisnelheid $\vec{\omega}$ langs de lichaamsvaste assen zijn $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \omega \sin\alpha$ en $\omega_3 = \omega\cos\alpha$. De hoofdtraagheidsmomenten zijn $I_1 = I_2 = I$ en $I_3 = I_s$. Uit de relatie $\mathbf{L} = \mathbf{I}\cdot\vec{\omega}$ volgt dan dat $L_1 = 0$, $L_2 = I\omega\sin\alpha$ en $L_3 = I_s\omega\cos\alpha$.

b. Het impulsmoment draait mee met het voorwerp, zodat $(d\mathbf{L}/dt)_{rot} = 0$. Het krachtmoment $\mathbf{N}$ dat de as uitoefent op het voorwerp voldoet dus aan de gelijkheid $\mathbf{N} = d\mathbf{L}/dt = \vec{\omega}\times\mathbf{L}$. Dat geeft
$\mathbf{N} = \mathbf{e}_1(\omega_2 L_3 - \omega_3 L_2) = \mathbf{e}_1(I_s - I)\omega^2\cos\alpha\sin\alpha$. Het krachtmoment dat het voorwerp op de as uitoefent is hiervan het tegengestelde, dus $-\mathbf{e}_1(I_s - I)\omega^2\cos\alpha\sin\alpha$.

c. Dit krachtmoment is in grootte maximaal als $\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha/2$ maximaal is, dus bij $\alpha = \pi/4$.

d. Het krachtmoment uitgeoefend op de as is dan $-\mathbf{e}_1(I_s - I)\omega^2/2$.

e. De hoek θ voldoet aan de algemene gelijkheid $\tan\theta = L_2/L_3 = (I\omega_2)/(I_s\omega_3) = (I/I_s)\tan\alpha$. In het geval dat N maximaal is geldt $\alpha = \pi/4$, zodat $\tan\theta = I/I_s$.

Opgave 3.

a. De lengtes van de drie veren zijn x_1, $x_2 - x_1$ en $a - x_2$. Dus de potentiële energie is $V = (k/2)[(x_1 - L)^2 + (x_2 - x_1 - L)^2 + (a - x_2 - L)^2]$. De kinetische energie bedraagt $T = (m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2)/2$.

b. Daarmee is ook de Lagrangiaan $L = T - V$ gevonden als functie van x_1 en x_2, en $\dot{x}_1$ en $\dot{x}_2$.

c. De Lagrange-bewegingsvergelijkingen $(d/dt)(\partial L/\partial\dot{x}_i) = \partial L/\partial x_i$ geven dan $m\ddot{x}_1 = -k(2x_1 - x_2)$ en $m\ddot{x}_2 = -k(2x_2 - x_1 - a)$ voor de twee vrijheidsgraden.

d. Uit optellen en aftrekken volgt $m\ddot{x}_+ = -k(x_+ - a)$ en $m\ddot{x}_- = -k(3x_- + a)$.

e. De bijbehorende oscillatiefrequenties zijn dus $\omega_+ = \sqrt{k/m}$ en $\omega_- = \sqrt{3k/m}$.