

Tentamen Klassieke Mechanica 2

27 oktober 2008

Opgave 1

Een star voorwerp bestaat uit drie kogels, die door starre staven met verwaarloosbare massa aan elkaar verbonden zijn. De kogels mogen als puntvormig worden beschouwd, en ze bevinden zich op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek met zijde a . Twee van de drie kogels hebben massa m (dat zijn de lichte kogels), de derde (zware) kogel heeft de dubbele massa $2m$.

- Beargumenteer dat het zwaartepunt ligt op de middelloodlijn van de zijde tussen de twee lichte kogels. Bepaal de positie van het zwaartepunt op deze middelloodlijn.
- Bepaal de afstand van het zwaartepunt tot elk van de lichte kogels.

We gebruiken het voorwerp als een (asymmetrische) slinger die slingert in zijn eigen vlak. Daartoe wordt het voorwerp opgehangen aan een horizontale as door één van de lichte kogels. De as staat loodrecht op het vlak van de driehoek.

- Geef aan wat de oriëntatie van het voorwerp is in evenwicht. (Dat kan bijvoorbeeld door de tangens te geven van de hoek die de vertikaal maakt met de zijde door de lichte kogels.)
- Bepaal het traagheidsmoment van het voorwerp voor rotaties om de as.
- Geef de trillingstijd van de slinger bij kleine uitwijkingen uit evenwicht.

Opgave 2.

Een star voorwerp heeft een symmetrie-as. Het hoofdtraagheidsmoment voor rotaties om deze as (de 3-as) is I_s , en voor rotaties om elke as loodrecht op de symmetrie-as is het hoofdtraagheidsmoment I . Het voorwerp roteert met hoeksnelheid ω om een vaste as die een hoek α maakt met de symmetrie-as. We kiezen de lichaamsvaste assen zodanig dat ω in het vlak door de 2-as en de 3-as van het voorwerp ligt.

- Geef de componenten van het impulsmoment langs de lichaamsvaste assen.

- b. Bereken in het lichaamsvaste stelsel de componenten van het krachtmoment dat het roterende voorwerp uitoefent op de rotatie-as.
- c. Bepaal de waarde van de hoek α waarvoor de grootte van dit krachtmoment maximaal is.
- d. Geef de componenten van het krachtmoment in dit geval.
- e. Geef in dit geval een uitdrukking voor de hoek θ die het impulsmoment maakt met de 3-as.

Opgave 3.

Twee vaste punten die zich op afstand a van elkaar bevinden hebben de coördinaat $x = 0$ en $x = a$. Op de rechte lijn tussen deze twee punten bevinden zich twee identieke voorwerpen, elk met massa m , en met posities x_1 en x_2 . De voorwerpen zijn met elkaar verbonden door een veer met veerconstante k . In ontspannen toestand heeft de veer een lengte L . Twee andere veren, identiek aan de eerste, verbinden de beide voorwerpen elk met één van de vaste punten. De voorwerpen bewegen zonder wrijving op de lijn tussen de beide vaste punten. De totale lengte van de drie veren samen heeft dus de vaste waarde a . De vrijheidsgraden worden beschreven door de posities x_1 en x_2 .

- a. Geef een uitdrukking voor de potentiële energie en voor de kinetische energie.
- b. Geef de Lagrangiaan als functie van de posities x_1 en x_2 , en de snelheden \dot{x}_1 en \dot{x}_2 .
- c. Geef de Lagrange-bewegingsvergelijkingen.

De bewegingsvergelijkingen zijn gekoppeld. Op grond van de symmetrie van het systeem verwachten we dat de som $x_+ = x_1 + x_2$ en het verschil $x_- = x_1 - x_2$ aan ontkoppelde vergelijkingen voldoen.

- d. Geef de bewegingsvergelijkingen voor x_+ en x_- .
- e. Wat zijn de frequenties waarmee x_+ en x_- oscilleren?