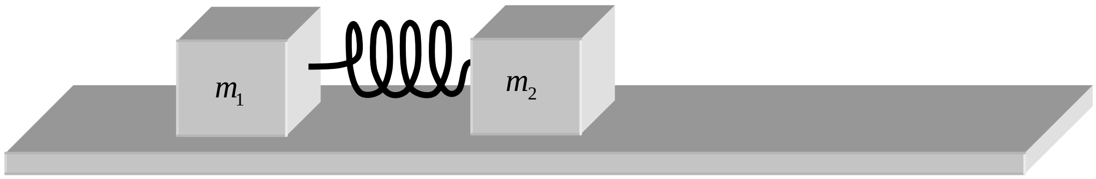
Uitwerking tentamen Klassieke Mechanica II

Dinsdag 23 oktober 2001

OPGAVE 1



a) Dit systeem heeft 2 vrijheidsgraden. Bijvoorbeeld de Cartesische coördinaten x_1 en x_2, of de lineaire combinaties $q_1 = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1+m_2)$ (positie massamiddelpunt) en $q_2 = (x_1 - x_2)$ (onderlinge afstand).

b) $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2$. Let op: bij de uitdrukking voor de potentiële energie van de veer kiezen we er hier voor om met de coördinaten x_1 en x_2 de afstand aan te geven voor elk blok van een uitgangspositie waarbij de veer in ruststand verkeert. Dus als $x_1 = x_2 = 0$, bevinden de blokken zich *niet* op dezelfde positie.

c) Er zijn voor de bewegingen van beide blokken in de x-richting geen beperkingen opgelegd. In de Lagrangevgln. treden dan ook geen "constraint-forces" op. (strikt genomen is de niet-holonome beperking werkzaam dat de blokken niet "door elkaar heen" kunnen bewegen).

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = 0$$

d) Als we de twee vergelijkingen uit c) bij elkaar optellen krijgen we:

$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$, ofwel $\ddot{q}_1 = 0$ (zie onderdeel a voor definitie van q_1).

Als we m_1 keer de tweede vergelijking aftrekken van m_2 keer de eerste vergelijking, krijgen we:

$m_1m_2(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k(m_1+m_2)(x_1-x_2) = 0$, of, anders geschreven,

$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k\dfrac{m_1+m_2}{m_1m_2}(x_1-x_2) = 0$, ofwel $\ddot{q}_2 + k\dfrac{m_1+m_2}{m_1m_2}q_2 = 0$.

e) De oplossing van de eerste bewegingsvergelijking is

$m_1x_1 + m_2x_2 = a + bt$. Dit beschrijft een eenparige beweging van het massamiddelpunt van de twee blokken.

De oplossing van de tweede bewegingsvergelijking is

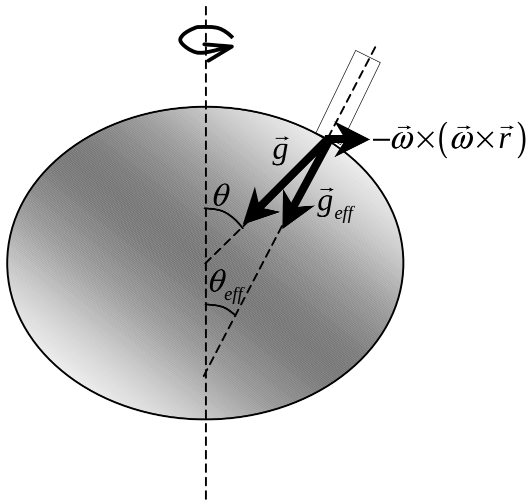
$x_1 - x_2 = p\cos(\omega t + \alpha)$, met $\omega = \sqrt{k\dfrac{m_1+m_2}{m_1m_2}}$. Dit beschrijft een harmonische beweging van de twee blokken ten opzichte van elkaar.

f) De beginpositie van het massamiddelpunt is vrij te kiezen. We nemen bijvoorbeeld $a = 0$. Verder volgt uit de begincondities: $b = m_2v_0$; $\alpha = -\frac{1}{2}\pi$; $p = -\dfrac{v_0}{\omega}$. Door de oplossingen van e) met elkaar te combineren vinden we:

$$x_1 = \frac{a+bt-m_2 p\cos(\omega t+\alpha)}{m_1+m_2} = v_0 \frac{m_2 t - \frac{m_2}{\omega}\sin(\omega t)}{m_1+m_2}$$

$$x_2 = \frac{a+bt+m_1 p\cos(\omega t+\alpha)}{m_1+m_2} = v_0 \frac{m_2 t + \frac{m_1}{\omega}\sin(\omega t)}{m_1+m_2}$$

OPGAVE 2



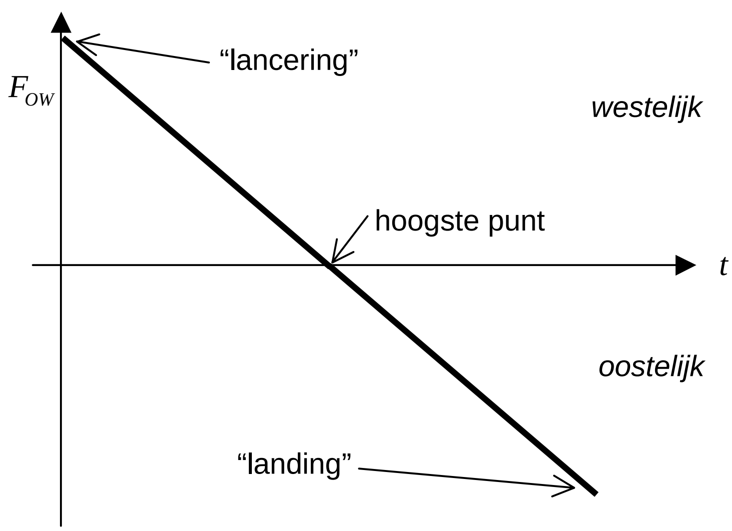
a) “Verticaal” betekent: in de richting van de *effectieve* “zwaartekrachtsversnelling”. Met effectief wordt hier bedoeld dat de centrifugaalversnelling al in rekening is gebracht. Als je iets “verticaal” laat hangen, dan hangt dat niet langs de richting van de èchte zwaartekrachtsvector, maar langs de richting van de vectorsom van zwaartekracht en centrifugaalkracht (zie tekening; let op: de schaal is sterk overdreven). Onder invloed van dezelfde combinatie van versnellingen, is de vorm van de aarde zodanig afgeplat t.o.v. een perfecte bol, dat het locale aardoppervlak altijd loodrecht staat op de effectieve zwaartekrachtsversnellingsvector $\vec{g}_{eff}$.

b) Zolang de lift stilstaat ondervind je ten opzichte van de lift de reeds bij a) besproken versnellingen. De componenten daarvan t.o.v. het locale aardoppervlak bedragen:
Zwaartekrachtsversnelling: $g\cos\Delta\theta$ naar de bodem (richting van $\vec{g}_{eff}$) en $g\sin\Delta\theta$ naar het noorden, waarbij $\Delta\theta$ het hoekverschil $\Delta\theta \equiv \theta - \theta_{eff}$ is. Je kunt deze hoek vinden m.b.v. een beetje gonio: $\tan\theta_{eff} = \left(1-\frac{\omega^2 r}{g}\right)\tan\theta$, waarbij r de aardstraal is.
Centrifugaalversnelling: $\omega^2 r\sin\theta\sin\theta_{eff}$ naar het plafond en $\omega^2 r\sin\theta\cos\theta_{eff}$ naar het zuiden. De resultante van deze twee versnellingen, $\vec{g}_{eff}$, is precies naar de bodem van de lift gericht. (Uiteraard oefent de bodem van de lift een naar boven gerichte tegenkracht uit, zodat je t.o.v. de lift niet beweegt.)

c) Als de lift met constante snelheid v naar boven beweegt (richting van $-\vec{g}_{eff}$), komt er naast de bij b) al besproken versnellingen, met resultante $\vec{g}_{eff}$ naar de bodem van de lift, nog één versnelling bij, namelijk de Coriolisversnelling $-2\vec{\omega}\times\vec{v}$. De rotatievector van de aarde $\vec{\omega}$ is naar het noorden gericht. De Coriolisversnelling heeft daarom een grootte van $2\omega v\sin\theta_{eff}$ en is naar het westen gericht.

d) Bij de vrije val is de versnelling die de lift ondervindt t.o.v. een vast punt op het aardoppervlak $\vec{g}_{eff}$. Ten opzichte van de lift ondervind je zelf in de richting van de bodem nu geen versnelling meer. De Coriolisversnelling is echter nog wel “voelbaar” ten opzichte van de lift, omdat de lift gedwongen wordt precies langs $\vec{g}_{eff}$ te bewegen. De Coriolisversnelling bedraagt nu $-2\vec{\omega}\times\vec{v}=-2t\vec{\omega}\times\vec{g}_{eff}$. Omdat tijdens de val op elk moment de snelheid naar beneden is gericht, is de Coriolisversnelling naar het oosten gericht.

e) Deze situatie is die van de vrije val (zie d), met initiële snelheid naar boven. In de noord-zuid en boven-onder richtingen ondervind je opnieuw tijdens de gehele beweging geen versnellingen ten opzichte van de lift. In oost-west richting wel. Omdat de snelheid lineair in de tijd afneemt van $+v_0$ naar $-v_0$, verloopt de Coriolisversnelling ook lineair in de tijd (zie figuur).



f) De grootte van de Coriolisversnelling bedraagt $|a_c|=|2\vec{\omega}\times\vec{v}|=2\omega\left(v_0-g_{eff}t\right)\sin\theta_{eff}$. De snelheid in westelijke richting bedraagt dus $v_c=2\omega\left(v_0t-\tfrac{1}{2}g_{eff}t^2\right)\sin\theta_{eff}$. En de verplaatsing in westelijke richting bedraagt $x=2\omega\left(\tfrac{1}{2}v_0t^2-\tfrac{1}{6}g_{eff}t^3\right)\sin\theta_{eff}$. Het moment van neerkomen is $t=2\dfrac{v_0}{g_{eff}}$. Invullen levert

$$x=2\omega\left(2\frac{v_0^3}{g_{eff}^2}-\tfrac{4}{3}\frac{v_0^3}{g_{eff}^2}\right)\sin\theta_{eff}\simeq\tfrac{4}{3}\omega\frac{v_0^3}{g_{eff}^2}\sin\theta=\tfrac{4}{3}\frac{2\pi}{24\cdot3600}\frac{v_0^3}{g_{eff}^2}\cos\left(52°\right)\approx5.0\text{ m}.$$

Je bent dus bij aankomst ten opzichte van de lift 5.0 m naar het westen verschoven, waarvan de helft (2.5 m) op weg naar boven en de andere helft op weg naar beneden.

g) Als de lift niet in de liftschacht maar naast de torenflat, precies verticaal gelanceerd wordt, beweegt deze verder volledig volgens de daarop werkende (schijn) versnellingen. Ten opzichte van de lift ondervindt de arme passagier dan geen versnellingen meer.

OPGAVE 3

a) De bijdrage die een schil met dikte da, straal a en massa $dM = 4\pi\rho a^2 da$, waarbij $\rho =$dichtheid, levert aan de potentiële energie van een puntvormige testmassa m op afstand r van het centrum van de schil is

$$\begin{cases} dV = -Gm\dfrac{dM}{r} & r > a \\ dV = -Gm\dfrac{dM}{a} & r < a \end{cases}$$

De totale potentiële energie van de testmassa in het zwaartekrachtsveld van een planeet met straal $R \geq r$ (gevraagd werd de potentiële energie *binnen* de planeet) is

$$V(r) = \int dV = -Gm\int_0^r \frac{4\pi\rho a^2 da}{r} - Gm\int_r^R \frac{4\pi\rho a^2 da}{a} = -4Gm\rho\pi\left[\tfrac{1}{3}r^2 + \tfrac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right)\right]$$

$$= -2Gm\rho\pi\left(R^2 - \tfrac{1}{3}r^2\right)$$

b) $F(r) = -\dfrac{dV}{dr} = -\tfrac{4}{3}Gm\rho\pi r$. Merk op dat dit precies gelijk is aan $-Gm\dfrac{M(r)}{r^2}$, waarbij $M(r)$ de massa is van dat gedeelte van de planeet dat zich binnen een straal r bevindt van het centrum van de planeet.

c) Als $F(r) = const.$, dan geldt dus dat $M(r) = \int_0^r 4\pi\rho(a)a^2 da \propto r^2$. Hieraan voldoet de planeet als $\rho(a) \propto a^{-1}$.

d) Voor $r > R_2$ geldt:

$V(r) = -Gm\dfrac{M_{totaal}}{r}$, waarbij $M_{totaal} = \tfrac{4}{3}\pi\left(\rho_1 R_1^3 + \rho_2 R_2^3 - \rho_2 R_1^3\right)$.

Voor $R_1 < r < R_2$ volgen we dezelfde aanpak als bij a):

$$-\frac{V(r)}{Gm} = \int_0^{R_1}\frac{4\pi\rho_1 a^2 da}{r} + \int_{R_1}^{r}\frac{4\pi\rho_2 a^2 da}{r} + \int_r^{R_2}\frac{4\pi\rho_2 a^2 da}{a}$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi\left(\rho_1\frac{R_1^3}{r} + \rho_2 r^2 - \rho_2\frac{R_1^3}{r}\right) + 2\pi\rho_2\left(R_2^2 - r^2\right)$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi\left(\rho_1 - \rho_2\right)\frac{R_1^3}{r} + 2\pi\rho_2 R_2^2 - \tfrac{2}{3}\pi\rho_2 r^2$$

Evenzo voor $r < R_1$:

$$-\frac{V(r)}{Gm} = \int_0^{r}\frac{4\pi\rho_1 a^2 da}{r} + \int_{r}^{R_1}\frac{4\pi\rho_1 a^2 da}{a} + \int_{R_1}^{R_2}\frac{4\pi\rho_2 a^2 da}{a}$$

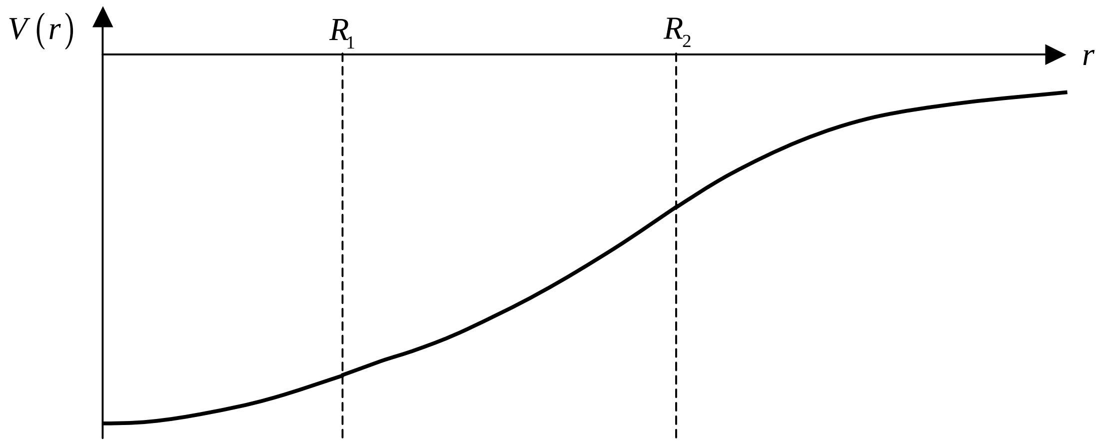
$$= \tfrac{4}{3}\pi\rho_1 r^2 + 2\pi\rho_1\left(R_1^2 - r^2\right) + 2\pi\rho_2\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

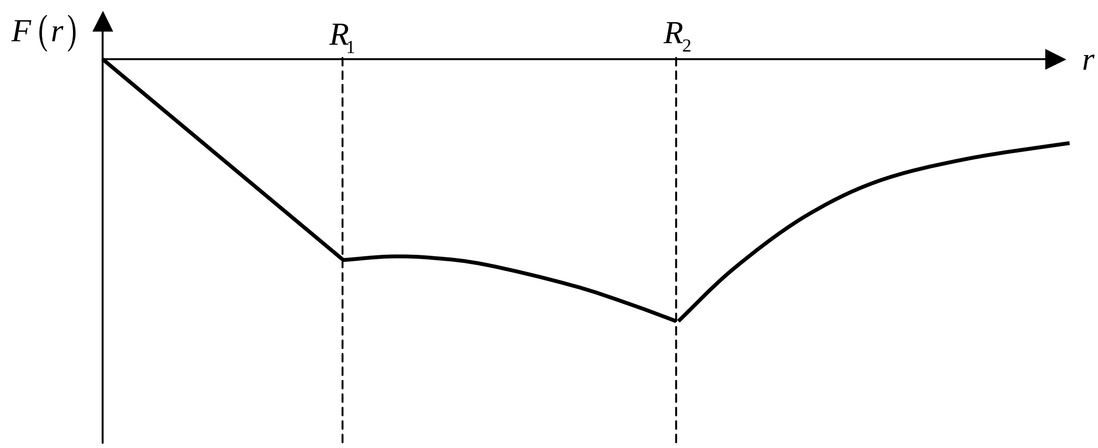
$$= 2\pi\left(\rho_1 - \rho_2\right)R_1^2 + 2\pi\rho_2 R_2^2 - \tfrac{2}{3}\pi\rho_1 r^2$$

Het laat zich snel controleren dat deze drie uitdrukkingen reduceren tot de uitdrukking bij a) in het geval dat $\rho_1 = \rho_2$.

De met deze potentiële energie overeenkomende krachten zijn:

$$F(r)=\begin{cases}-Gm\dfrac{M_{totaal}}{r^2} & r>R_2\\ -Gm\cdot\frac{4}{3}\pi\left[\rho_2 r+(\rho_1-\rho_2)\dfrac{R_1^3}{r^2}\right] & R_1<r<R_2\\ -Gm\cdot\frac{4}{3}\pi\rho_1 r & r<R_1\end{cases}$$





Voor $r<R_1$ is $F(r)$ lineair in r. Omdat $\rho_1>\rho_2$, is $F(r)$ in het eerste deel steiler dan de lineaire component in het tweede deel. Voor $r>R_2$ neemt de grootte van $F(r)$ kwadratisch af met de afstand. Merk op dat $F(r)$ ook bij de twee speciale afstanden, R_1 en R_2 continu is. De potentiële energie $V(r)$ is daarom in deze punten continu differentieerbaar. Het eerste deel van de potentiaal is een parabool. Het laatste deel vertoont de vertrouwde $1/r$ afhankelijkheid.

e) Nee. Zie antwoord bij d). Je kunt uit deze meting behalve ρ_2 uitsluitend het product $(\rho_1-\rho_2)R_1^3$ bepalen. Om de afzonderlijke waarden van R_1, en ρ_1 te bepalen, heb je een aanvullende, onafhankelijke meting nodig, bijvoorbeeld van de straal R_1.