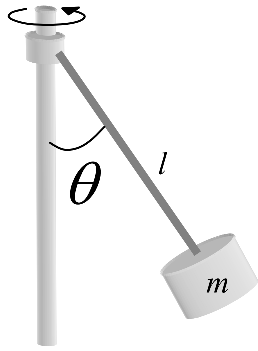
Hertentamen Klassieke Mechanica II
Woensdag 26 november 2003
Duur: 3 uur

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam**, **studierichting**, en evt. **collegekaartnummer**! (TIP: lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag)

Uitslag: over ca. 2 weken bij studentenadministratie en op de KM2-webpagina. Als je bezwaar hebt tegen vermelding van je uitslag op de webpagina, geef dit dan duidelijk aan op het eerste blad.

OPGAVE 1: *draaiende slinger*

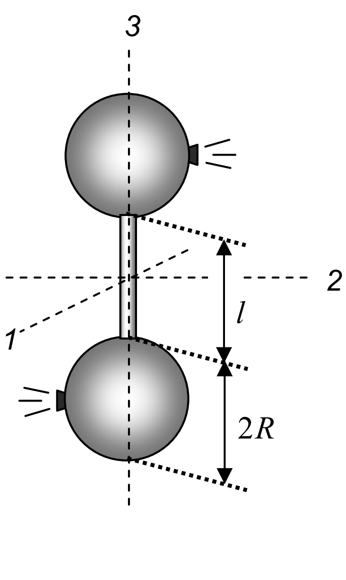
We beschouwen een massa m verbonden met een starre, massaloze stang met lengte l met een verticale draaias. De draaias kan vrij draaien met hoeksnelheid ω; de hoek θ tussen de stang en de draaias kan zich vrij instellen. Op dit systeem werken geen externe krachten anders dan de zwaartekracht.



a) Hoeveel vrijheidsgraden heeft dit systeem? Welke gegeneraliseerde coördinaten gebruik je?
b) Stel de Lagrangefunctie op, uitgedrukt in de bij a) gekozen gegeneraliseerde coördinaten.
c) Stel nu de Lagrangevergelijkingen op.
d) We concentreren ons eerst op puur stationaire oplossingen. Als de hoeksnelheid ω constant is, wat impliceert dit dan voor de hoek θ? Reken de hoek θ uit. Maak hierbij onderscheid tussen de situaties dat $\omega^2 > g/l$ en $\omega^2 \leq g/l$.
e) We gaan verder met de eerste situatie, $\omega^2 > g/l$, maar nu voor gevallen waarbij de begincondities niet precies overeenkomen met de stationaire oplossing van d). Het gevolg is dat de in de oplossing optredende hoeken t.o.v. de stationaire oplossing kleine, tijdsafhankelijke afwijkingen laten zien, bijvoorbeeld $\delta\theta(t)$. Los de Lagrangevergelijkingen voor deze afwijkingen op, waarbij alle producten en hogere machten van de hoekafwijkingen verwaarloosd mogen worden.

OPGAVE 2: *haltervormige satelliet*

Een satelliet is opgebouwd uit twee bolvormige gedeelten, die verbonden zijn door een cilindrische buis. De bollen hebben elk een straal R en een massa m en de buis heeft een lengte l en een verwaarloosbaar kleine massa. Neem aan dat de massa van de bollen homogeen over hun volume is verdeeld.



a) Bereken de drie hoofdtraagheidsmomenten. Hierbij mogen de twee bollen *niet* als puntmassa's worden beschouwd! (Tip: als je het traagheidsmoment van een bol niet weet en niet kunt uitrekenen, gebruik dan een schatting; zorg ervoor dat de dimensies in ieder geval kloppen!)

b) Op het midden van elke bol bevindt zich een stuurraket (zie tekening) waarmee een rotatie om as *1* kan worden bewerkstelligd. Stel dat $R=10$ m, $l=20$ m en $M=1000$ kg. Stel verder dat de stuwkracht per raket $F=25$ N bedraagt. Hoe lang moeten de twee raketten aanstaan om een kunstmatige zwaartekrachts-versnelling te genereren in het midden van de twee bollen van $\frac{1}{2}g$?

c) Wat voor krachten voel een astronaut als deze in de draaiende satelliet van de ene bol door de buis naar de andere bol beweegt?

d) Gebruik de Eulervergelijkingen om te analyseren wat er gebeurt met de rotatie als de stuwraketten niet alleen een draaiing rondom as *1* hebben veroorzaakt maar ook een lichte rotatie rondom as *3*; m.a.w. geef de rotatiesnelheden ω_1 ,ω_2 en ω_3 als functie van de tijd, uitgaande van $\omega_2=0$ en $\omega_3 \ll \omega_1$ op tijdstip $t=0$.

We brengen de satelliet in een cirkelbaan met straal r rondom een planeet met massa M_p en laten de satelliet zo langzaam rondom zijn as *1* draaien, dat een van de twee bollen voortdurend in de richting van de planeet wijst.

e) Gemiddeld heerst er nu binnen de satelliet gewichtsloosheid. Toch zijn er kleine variaties. Hoe groot is de daardoor optredende versnelling die in het midden van elk van de twee bollen te voelen is? (Tip: gebruik een Taylor-expansie t/m de lineair term) In welke richting staat deze versnelling in elke bol? Hoe noem je deze versnelling of de daarmee geassocieerde krachten?

f) Wat voor beweging zal de satelliet maken ten gevolge van de bij e) beschouwde versnellingen als as *3* van de satelliet aanvankelijk niet precies naar de planeet gericht is? Reken deze beweging uit in de limiet van een kleine, initiële fouthoek.

OPGAVE 3: *vreugdeschoten*

Stel je het volgende experiment voor. Op tijdstip $t=0$ vuren we in Leiden (52^{e} breedtegraad) een kogel af, precies recht omhoog. De kogel verlaat het geweer met een snelheid van 350 m/s.

a) Welke versnelling(en) ‘voelt’ de kogel?
b) Welke versnelling(en) van de kogel nemen wij waar vanaf het aardoppervlak?
c) Landt de kogel precies op zijn startpunt? Zonee, in welke richting wijkt het inslagpunt dan af van het startpunt?
d) Leid af hoe de snelheid van de kogel afhangt van de tijd (beschrijf hierbij expliciet de verticale component en de eventuele horizontale componenten). Neem aan dat de luchtwrijving verwaarloosd kan worden.
e) Gebruik het resultaat bij d) om de baan van de kogel uit te rekenen (opnieuw: expliciet vermelden hoe groot de verticale en evt. horizontale componenten zijn).
f) Waar slaat de kogel in?