**Uitwerking hertentamen Klassieke Mechanica II**
**Woensdag 26 november 2003**

OPGAVE 1: *draaiende slinger*

a) Dit systeem heeft twee vrijheidsgraden. Je kunt bijvoorbeeld de poolhoek $\theta$ gebruiken om de uitwijking van de slinger vast te leggen en een azimuthale hoek $\phi$ om de draaistand aan te geven.

b) In deze twee poolcoördinaten uitgedrukt, heeft de Lagrangefunctie de volgende vorm: $L = K - V = \frac{1}{2} ml^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta\right) + mgl\cos\theta$

c) $$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta} - ml^2\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta = 0 \\ ml^2\ddot{\phi}\sin^2\theta + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

d) Uit $\dot{\phi} = \omega = \text{constant}$ volgt $\ddot{\phi} = 0$, zodat we met de 2^e^ Lagrangevergelijking vinden dat $\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = 0$, hetgeen impliceert dat $\theta = \text{constant}$. In de 1^e^ Lagrangevergelijking leidt $\ddot{\theta} = 0$ tot $\sin\theta\left(l\omega^2\cos\theta + g\right) = 0$. Dit levert 2 oplossingen voor $\theta$, namelijk $\theta = 0$ of $\theta = \arccos\left(g/l\omega^2\right)$. De tweede oplossing is alleen mogelijk als $\omega^2 > g/l$. Als $\omega^2 \le g/l$, is alleen $\theta = 0$ beschikbaar als stationaire oplossing. Strikt genomen vormt $\theta = 0$ ook een stationaire oplossing voor de situatie $\omega^2 > g/l$, maar deze oplossing komt overeen met een niet stabiel evenwicht.

e) De bij (d) bedoelde stationaire oplossing voor $\omega^2 > g/l$ noteren we als $\phi_0(t) = \omega t$ en $\theta_0 = \arccos\left(g/l\omega^2\right)$. Nu kijken we naar oplossingen van de vorm $\phi(t) = \phi_0(t) + \delta\phi(t) = \omega t + \delta\phi(t)$ en $\theta(t) = \theta_0 + \delta\theta(t)$, dicht bij de stationaire oplossing. Invullen in de Lagrangevergelijkingen levert op:

$$\begin{cases} ml^2\left(\ddot{\theta}_0 + \delta\ddot{\theta}\right) - ml^2\left(\dot{\phi}_0 + \delta\dot{\phi}\right)^2 \sin\left(\theta_0 + \delta\theta\right)\cos\left(\theta_0 + \delta\theta\right) + mgl\sin\left(\theta_0 + \delta\theta\right) = 0 \\ ml^2\left(\ddot{\phi}_0 + \delta\ddot{\phi}\right)\sin^2\left(\theta_0 + \delta\theta\right) + 2ml^2\left(\dot{\theta}_0 + \delta\dot{\theta}\right)\left(\dot{\phi}_0 + \delta\dot{\phi}\right)\sin\left(\theta_0 + \delta\theta\right)\cos\left(\theta_0 + \delta\theta\right) = 0 \end{cases}$$

Nu ontwikkelen we alles t/m de eerste orde in $\theta$, $\phi$ en hun tijdsafgeleiden en gebruiken het feit dat $\theta_0 = \text{constant}$ en dat $\dot{\phi}_0 = \omega$,:

$$\begin{cases} l\delta\ddot{\theta} - l\left(\omega + \delta\dot{\phi}\right)^2\left(\sin\theta_0 + \delta\theta\cos\theta_0\right)\left(\cos\theta_0 - \delta\theta\sin\theta_0\right) + g\left(\sin\theta_0 + \delta\theta\cos\theta_0\right) = 0 \\ \delta\ddot{\phi}\left(\sin\theta_0 + \delta\theta\cos\theta_0\right)^2 + 2\delta\dot{\theta}\left(\omega + \delta\dot{\phi}\right)\left(\sin\theta_0 + \delta\theta\cos\theta_0\right)\left(\cos\theta_0 - \delta\theta\sin\theta_0\right) = 0 \end{cases}$$

We trekken de Lagrangevergelijkingen voor $\theta_0$ en $\phi_0$ van deze vergelijkingen af en laten alle producten en hogere machten van $\delta\theta$, $\delta\phi$ en hun tijdsafgeleiden weg:

$$\begin{cases} \delta\ddot{\theta} + \delta\theta\left[\frac{g}{l}\cos\theta_0 - \omega^2\left(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right)\right] - 2\omega\delta\dot{\phi}\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0 \\ \delta\ddot{\phi} + 2\omega\delta\dot{\theta}\cot\theta_0 = 0 \end{cases}$$

Gebruik voor de oplossing de ansatz $\delta\theta(t) = A\exp\left(i\Omega t\right)$ en $\delta\phi(t) = B\exp\left(i\Omega t\right)$. Invullen levert:

$$\begin{cases} -A\Omega^2 + A\left[\frac{g}{l}\cos\theta_0 - \omega^2\left(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right)\right] - 2\omega i\Omega B\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0 \\ -B\Omega + 2\omega i A\cot\theta_0 = 0 \end{cases}$$

Als we de tweede vergelijking in de eerste invullen, krijgen we:

$$\begin{cases} \Omega = \sqrt{\frac{g}{l}\cos\theta_0 + \omega^2\left(1 + 2\cos^2\theta_0\right)} \\ \dfrac{B}{A} = 2i\dfrac{\omega}{\Omega}\cot\theta_0 \end{cases}$$

We zien dat de storing overeenkomt met een regelmatige nutatie van de massa rondom de stationaire oplossing, die plaatsvindt met een hoeksnelheid $\Omega$.

OPGAVE 2: *haltervormige satelliet*

a) Het traagheidsmoment van een homogene bol met straal $R$ en massa $M$ bedraagt $I_{bol} = \frac{2}{5}MR^2$. Het traagheidsmoment van de haltervormige satelliet t.o.v. as *3* bedraagt $I_3 = 2I_{bol} = \frac{4}{5}MR^2$. De twee andere traagheidsmomenten krijgen we door gebruik te maken van het parallelle-as theorema:

$$I_{12} \equiv I_1 = I_2 = 2\left[I_{bol} + M\left(R + \tfrac{1}{2}l\right)^2\right] = 2\left[\tfrac{2}{5}MR^2 + MR^2 + \tfrac{1}{4}Ml^2 + MRl\right]$$
$$= M\left(\tfrac{14}{5}R^2 + 2Rl + \tfrac{1}{2}l^2\right)$$

b) Voor een centrifugaalversnelling van $\frac{1}{2}g$ moet de hoeksnelheid van de rotatie voldoen aan $\omega_1^2(R + \frac{1}{2}l) = \frac{1}{2}g$, ofwel $\omega_1 = \sqrt{g/(2R+l)}$. We gebruiken nu dat $L = I_{12}\omega_1 = \tau t$, waarbij $\tau = F\left(2R + l\right)$ het krachtmoment is dat door de twee raketten wordt geleverd en $t$ de gevraagde tijd waarover de raketten aanstaan. $I_{12}$ is het bij (a) uitgerekende traagheidsmoment t.o.v. as *1*. Invullen levert: $t = \dfrac{M\left(\frac{14}{5}R^2 + 2Rl + \frac{1}{2}l^2\right)\sqrt{g/(2R+l)}}{F\left(2R+l\right)}$. We substitueren nu de gegeven afmetingen en massa en krijgen dan $t = 440$ s.

c) De astronaut die in de draaiende satelliet van de ene bol door de buis naar de andere bol beweegt, ondervindt behalve de centrifugaalversnelling, ter grootte $\omega_1^2 d$, waarbij $d$ de (resterende) afstand naar het midden is, ook nog de zijwaarts gerichte Coriolisversnelling $2\omega_1 v$, waarbij $v$ de snelheid is van de astronaut t.o.v. het ruimteschip.

d) De Eulervergelijkingen luiden voor deze situatie (geen krachtmomenten en $I_1 = I_2 = I_{12}$):

$$\begin{cases} I_{12}\dot\omega_1 - \left(I_{12} - I_3\right)\omega_3\omega_2 = \tau_1 = 0 \\ I_{12}\dot\omega_2 + \left(I_{12} - I_3\right)\omega_3\omega_1 = \tau_2 = 0 \\ I_3\dot\omega_3 = \tau_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot\omega_1 - C\omega_2 = 0 \\ \dot\omega_2 + C\omega_1 = 0 \\ \omega_3 = \text{constant} \end{cases} \quad \text{met} \quad C \equiv \frac{\left(I_{12} - I_3\right)}{I_{12}}\omega_3$$

We zien meteen dat de lichte rotatie rond as *3* constant zal zijn. De rotaties rondom de twee andere assen zijn via de eerste twee vergelijkingen met elkaar gekoppeld. Invullen van de probeerfuncties $\omega_1\left(t\right) = a\cos\left(\Omega t + \alpha\right)$ en $\omega_2\left(t\right) = a\sin\left(\Omega t + \alpha\right)$ leidt tot de hoeksnelheid waarmee de rotatieas precedeert:

$\Omega = -C \equiv -\frac{(I_{12} - I_3)}{I_{12}}\omega_3$. Omdat $\omega_2 = 0$ op tijdstip $t = 0$, is de fasehoek nul, $\alpha = 0$.

Omdat $\omega_3 \ll \omega_1$ op tijdstip $t = 0$, geldt dat de amplitude $a$ vrijwel gelijk is aan de bij (b) uitgerekende hoeksnelheid $a \approx \sqrt{g/(2R+l)}$.

e) De totale gewichtskracht die op de satelliet werkt, bedraagt:

$$
\begin{aligned}
F_{zw}^{tot} &= -GM_pM\left(\frac{1}{\left(r+R+\frac{1}{2}l\right)^2} + \frac{1}{\left(r-R-\frac{1}{2}l\right)^2}\right) \\
&= -G\frac{M_pM}{r^2}\left[1-2\frac{R+\frac{1}{2}l}{r} + O\left(\frac{R+\frac{1}{2}l}{r}\right)^2 + 1 + 2\frac{R+\frac{1}{2}l}{r} + O\left(\frac{R+\frac{1}{2}l}{r}\right)^2\right] \\
&= -2G\frac{M_pM}{r^2}\left[1+O\left(\frac{R+\frac{1}{2}l}{r}\right)^2\right] \simeq -2G\frac{M_pM}{r^2}
\end{aligned}
$$

De hoeksnelheid $\omega_{baan}$ bij de straal $r$ van de cirkelbaan zal zodanig zijn dat deze totaalkracht overeenkomt met de benodigde, gecombineerde centripetaalkracht op de twee bollen:

$$
\begin{aligned}
F_{cpt}^{tot} &= -M\omega_{baan}^2\left[\left(r+R+\tfrac{1}{2}l\right)+\left(r-R-\tfrac{1}{2}l\right)\right] \\
&= -2M\omega_{baan}^2 r
\end{aligned}
\quad\text{, zodat } \omega_{baan}^2 = G\frac{M_p}{r^3}
$$

In het midden van de twee bollen heersen nu nettoversnellingen van:

$$
\begin{aligned}
a_{buiten} &= -GM_p\frac{1}{\left(r+R+\frac{1}{2}l\right)^2} + \omega_{baan}^2\left(r+R+\tfrac{1}{2}l\right) \\
&= -GM_p\frac{1}{\left(r+R+\frac{1}{2}l\right)^2} + GM_p\frac{r+R+\frac{1}{2}l}{r^3} \\
&= -G\frac{M_p}{r^2}\left[1-2\frac{R+\frac{1}{2}l}{r} + O\left(\frac{R+\frac{1}{2}l}{r}\right)^2 - \frac{\left(r+R+\frac{1}{2}l\right)}{r}\right] \\
&= G\frac{M_p}{r^2}\left[3\frac{R+\frac{1}{2}l}{r} + O\left(\frac{R+\frac{1}{2}l}{r}\right)^2\right] \simeq 3GM_p\frac{R+\frac{1}{2}l}{r^3} \quad \text{en op dezelfde manier:}
\end{aligned}
$$

$$
a_{binnen} = -G\frac{M_p}{r^2}\left[3\frac{R+\frac{1}{2}l}{r} + O\left(\frac{R+\frac{1}{2}l}{r}\right)^2\right] \simeq -3GM_p\frac{R+\frac{1}{2}l}{r^3}
$$

De verschilversnelling is voor de buitenste bol weggericht van de planeet en voor de binnenste bol gericht naar de planeet toe. Dergelijke versnellingen worden getijdeversnellingen genoemd.

f) Als as *3* van de satelliet aanvankelijk niet precies naar de planeet gericht is, leiden de bij (e) uitgerekende getijdeversnellingen tot een krachtmoment dat de satelliet terugdraait. We benaderen deze situatie voor kleine fouthoeken en krijgen dan het gedrag van een harmonische slinger. Voor kleine fouthoeken $\theta$ zijn de schijnversnellingen constant in grootte. Het geleverde krachtmoment is $\tau \simeq -M\left|a_{binnen}\right|(2R+l)\sin\theta \simeq -M\left|a_{binnen}\right|(2R+l)\theta$. Als gevolg hiervan verandert het impulsmoment volgens $\dot{L} = I_{12}\ddot{\theta} = \tau$, waaruit volgt $\ddot{\theta} = -\frac{M\left|a_{binnen}\right|(2R+l)}{I_{12}}\theta$. Het gevolg is een harmonische slingerbeweging van het type $\theta(t)=\theta_0\sin\left(\omega_{slinger}t\right)$ met hoeksnelheid $\omega_{slinger}=\sqrt{\frac{M\left|a_{binnen}\right|(2R+l)}{I_{12}}}\simeq\omega_{baan}\sqrt{3\frac{2R^2+2Rl+\frac{1}{2}l^2}{\frac{14}{5}R^2+2Rl+\frac{1}{2}l^2}}$, waarbij $\omega_{baan}$ de bij (e) uitgerekende hoeksnelheid van de baan is.

OPGAVE 3: *vreugdeschoten*

a) De kogel ondervindt uitsluitend de zwaartekrachtsversnelling.

b) Vanaf het aardoppervlak, dus binnen een coördinatenstelsel dat met de aarde meedraait, nemen wij een beweging waar waarbij de kogel drie versnellingen ondervindt, namelijk de zwaartekrachtsversnelling, de centrifugaalversnelling en de coriolisversnelling. De zwaartekrachtsversnelling en de centrifugaalversnelling combineren we in de versnelling $\vec{g}_{eff}$. 'Recht omhoog' betekent: langs de vector $-\vec{g}_{eff}$.

c) Ten gevolge van de coriolisversnelling landt de kogel niet op zijn startpunt. Het inslagpunt wijkt af naar het westen (zie d).

d) De versnelling bedraagt $\vec{a}=\vec{g}_{eff}-2\vec{\omega}\times\vec{v}\cong\vec{g}_{eff}-2\vec{\omega}\times\vec{v}_z$, waarbij $\vec{\omega}$ de rotatie is van de aarde, $\vec{v}$ de snelheid van de kogel, en $\vec{v}_z$ de component daarvan loodrecht op het aardoppervlak. Om de snelheid uit te rekenen, integreren we de versnelling langs de baan van de kogel. De verticale snelheid wordt gegeven door $v_z=v_0-g_{eff}t$. De snelheid parallel aan het aardoppervlak t.g.v. de coriolisversnelling bedraagt: $v_x=\int_{t'=0}^{t}-2\omega v_z(t')\cos\Theta dt'=-\omega\cos\Theta\left(2v_0t-g_{eff}t^2\right)$, waarbij $\Theta=52°$ de breedtegraad is. Het minteken geeft aan dat de snelheid naar het westen is gericht.

e) Verticale component: $z=v_0t-\frac{1}{2}g_{eff}t^2$.
Horizontale component: $x=-\omega\cos\Theta\left(v_0t^2-\frac{1}{3}g_{eff}t^3\right)$.

f) Om het inslagpunt van de kogel uit te rekenen hebben we de tijd nodig tot de inslag. Deze vinden we door te eisen dat de hoogte weer gelijk is aan nul: $t_{inslag}=2v_0/g_{eff}$. De horizontale afwijking bedraagt

$$x_{inslag}=-4\omega\cos\Theta\left(\frac{v_0^3}{g_{eff}^2}-\frac{2}{3}\frac{v_0^3}{g_{eff}^2}\right)=-\frac{4}{3}\omega\frac{v_0^3}{g_{eff}^2}\cos\Theta$$

$$=-\frac{4}{3}\frac{2\pi}{24\cdot3600}\frac{350^3}{9.8^2}\cos\left(52°\right)\ \text{m}=-27\ \text{m}$$

waarbij het minteken weer op een afwijking naar het westen duidt.