

TENTAMEN KLASSIEKE MECHANICA 2
Bij het college van Prof. J.M. van Ruitenbeek
28 oktober 2004, 10 -13 uur

Schrijf op elk vel dat u inlevert uw NAAM en STUDIERICHTING en COLLEGEKAARTNUMMER.

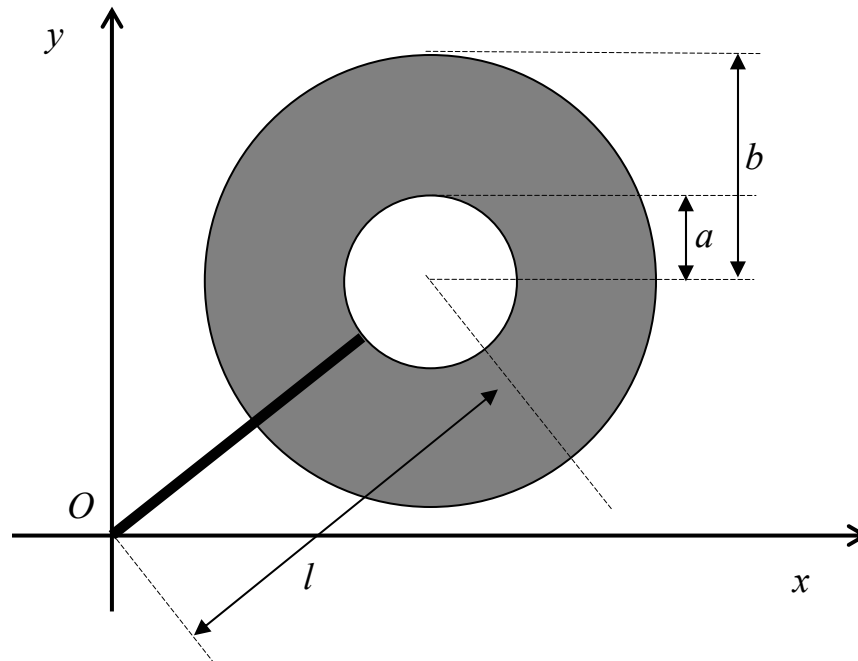
Het tentamen bestaat uit drie onderdelen.

1. Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen.

[a] De Eulerhoeken worden beschreven ten opzichte van drie assenstelsels, die ten opzichte van elkaar geroteerd zijn: het laboratoriumstelsel $Oxyz$, het lichaamsstelsel $O123$, en een hulpstelsel $Ox'y'z'$. De rotatiehoeken zijn φ , ϑ en ψ . Geef voor elk van deze hoeken aan om welke as de rotatie plaatsvindt.

[b] Een dunne schijf is met een massaloze staaf verbonden met een draaipunt O , op afstand l van het centrum van de schijf (zie tekening). De schijf heeft een massa m , een straal b , en er zit een gat in met straal a . Bereken het traagheidsmoment voor rotatie in het xy -vlak ten opzichte van het punt O .

NB: Het is niet voldoende alleen het resultaat te geven; geef ook de tussenstappen.



Wordt vervolgd op achterzijde...

[c] De traagheidstensor van een lichaam wordt gegeven door

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I & I_n & 0 \\ I_n & I & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{pmatrix}.$$

Binnen hetzelfde lichaamsvaste coördinatenstelsel wordt de rotatie van het lichaam beschreven door de vector

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \cos \alpha \\ \omega \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geef een uitdrukking voor het impulsmoment \vec{L} en de kinetische energie T .

[d] De Lagrangiaan voor een systeem met gegeneraliseerde coördinaten q_1 en q_2 wordt gegeven door de uitdrukking

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) - mgl(1 - \cos q_1).$$

Bereken de geconjugeerde gegeneraliseerde impuls voor elk van de coördinaten en bepaal de behouden grootheden.

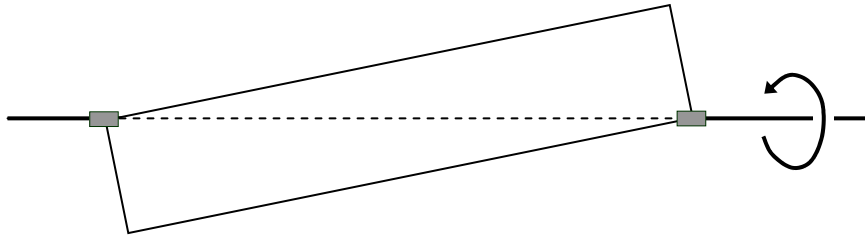
[e] Voor de isotrope harmonische oscillator in drie dimensies kan de potentiële energie geschreven worden als $V(x, y, z) = \frac{1}{2} k(x^2 + y^2 + z^2)$.

Gebruik cartesische coördinaten en geef de Hamiltoniaan en de bewegingsvergelijkingen van Hamilton voor dit systeem.

[f] We bekijken de bewegingen van een gyroscoop. Wat wordt verstaan onder precessie? Wat is nutatie? Geef een korte beschrijving van de begrippen en beschrijf in woorden wat de oorzaak van de bewegingen is.

Wordt vervolgd op volgende blad...

2. Beschouw een rechthoekige, dunne plank, met een verwaarloosbare dikte D , met een breedte $B = 10$ cm en een lengte $L = 50$ cm. De plank weegt 2 kg. Op twee tegenover elkaar liggende hoekpunten is een lager aangebracht, waarom de plank kan draaien.



We laten de plank draaien in de aangegeven richting, met een constante hoeksnelheid van twee omwentelingen per seconde.

[a] Geef in een tekening de 3 hoofdassen aan van de plank, en bereken de bijbehorende traagheidsmomenten. Bereken steeds de eindantwoorden in analytische vorm (formules) en bereken dan pas de numerieke waarden; vergeet de juiste eenheden niet.

[b] Reken het impulsmoment uit van de draaiende plank t.o.v. haar massamiddelpunt (grootte en richting). Teken de impulsmomentvector t.o.v. de plank.

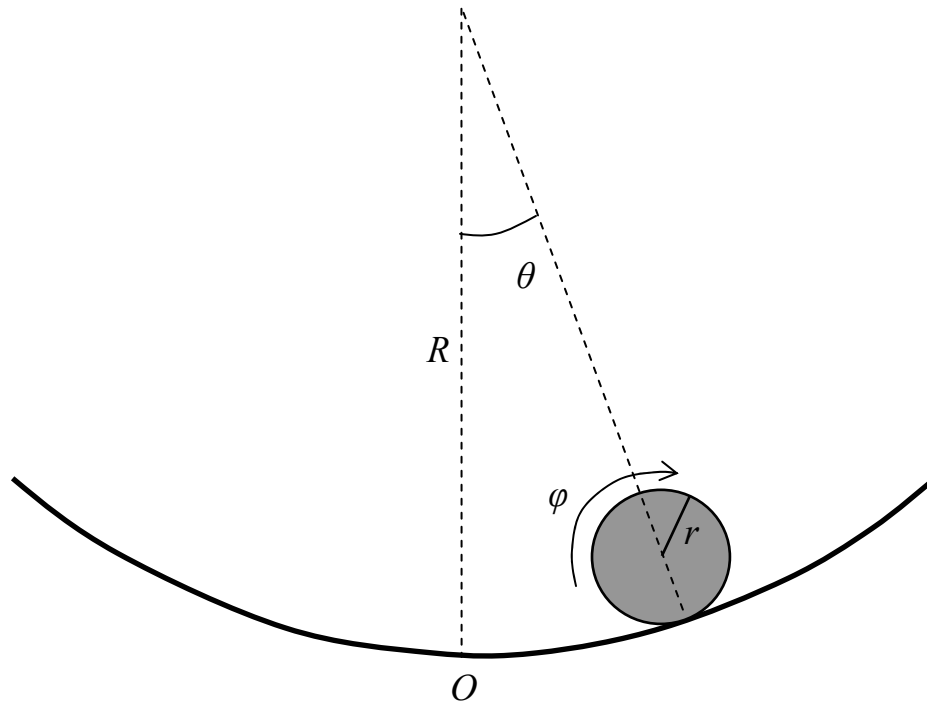
[c] Reken het krachtmoment uit dat nodig is om de plank rond de voorgeschreven as te laten draaien. Teken ook deze vector in.

[d] Hoe groot moeten de krachten zijn in de twee lagers, om het benodigde krachtmoment te leveren? In welke richting staan deze krachten?

[e] Als de plank plotseling losschiet uit de lagers, voert deze dan vanaf dat moment een simpele draaiing uit rondom een van de hoofdassen? Beredeneer uw antwoord.

Wordt vervolgd op achterzijde...

3. Een cilinder met straal r en massa m rolt, zonder slippen, binnen een grotere vaste cilinder met straal $R > r$. De cilinder beweegt zonder energieverlies en onder invloed van de valversnelling op aarde, $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- [a] Hoeveel vrijheidsgraden heeft het systeem? Formuleer de *constraints* en kies een stelsel generaliseerde coördinaten.
- [b] Geef de Lagrangiaan.
- [c] Geef de Lagrangevergelijkingen.
- [d] Los de Lagrangevergelijkingen op in de benadering dat de uitwijking klein is, $\vartheta \ll 1$.
- [e] Bereken de periode van de beweging wanneer gegeven is dat $R = 2r$ en $r = 3.33 \text{ m}$.