TENTAMEN KLASSIEKE MECHANICA 2: UITWERKINGEN
Bij het college van Prof. J.M. van Ruitenbeek
28 oktober 2004, 10 -13 uur

1. [a] De rotaties zijn als volgt: om de z-as met de hoek φ, vervolgens om de x'-as met de hoek ϑ, en tenslotte om de z'-as (ofwel de 3-as) met de hoek ψ.

[b] Bereken eerst het traagheidsmoment I_{cm} om het massamiddelpunt en pas dan de parallelle-assenstelling toe.
Noem de massadichtheid ρ en noem de dikte van de schijf D. De relatie tussen de massa en de dichtheid is dan:

$$m = \pi(b^2 - a^2)D\ \rho .$$

Daarmee wordt

$$I_{\text{cm}} = \int r^2 dm = \int_{\text{volume}} r^2 \rho\ dv = 2\pi\rho D \int_a^b r^3 dr = 2\pi\rho D \cdot \tfrac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\rho D \cdot \left(b^2 - a^2\right)\left(b^2 + a^2\right) = \tfrac{1}{2} m\left(b^2 + a^2\right)$$

Met de parallelle-assenstelling:

$$I = I_{\text{cm}} + ml^2 = \tfrac{1}{2} m\left(a^2 + b^2 + 2l^2\right)$$

[c] Het impulsmoment:

$$\vec{L} = \vec{\vec{I}} \cdot \vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} I & I_n & 0 \\ I_n & I & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} I\cos\alpha + I_n \sin\alpha \\ I_n \cos\alpha + I\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

De kinetische energie:

$$T = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}\omega^2 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I\cos\alpha + I_n \sin\alpha \\ I_n \cos\alpha + I\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 + I_n\omega^2 \cos\alpha\sin\alpha$$

[d] De geconjugeerde gegeneraliseerde impuls voor elk van de coördinaten

$$p_1 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1} = ml^2\dot{q}_1$$

$$p_2 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2} = ml^2\dot{q}_2 \sin^2 q_1$$

De behouden grootheden volgen uit de Lagrangevergelijkingen

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Een gegen. impulscoördinaat is behouden wanneer de laatste term nul is, hetgeen het geval is voor p_2

$$\dot{p}_2 = \frac{d}{dt}\left(ml^2 \dot{q}_2 \sin^2 q_1\right) = 0$$

[e] Voor een conservatief systeem is de Hamiltoniaan de som van de kinetische en de potentiële energie

$$\mathcal{H} = T + V = \tfrac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \tfrac{1}{2} k\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Nu dient de Hamiltoniaan altijd uitgedrukt te worden in termen van de gegeneraliseerde coördinaten q_i en de geconjugeerde impulscoördinaten p_i. We kunnen catesische coördinaten x, y, z gebruiken en dat geval zijn de impulscoördinaten eenvoudig $p_x = m\dot{x},\ p_y = m\dot{y},\ p_z = m\dot{z}.$

Dus

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \tfrac{1}{2} k\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

De Hamiltonvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{p_x}{m} = \dot{x} \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\dot{p}_x \quad \Rightarrow \quad kx = -\dot{p}_x \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

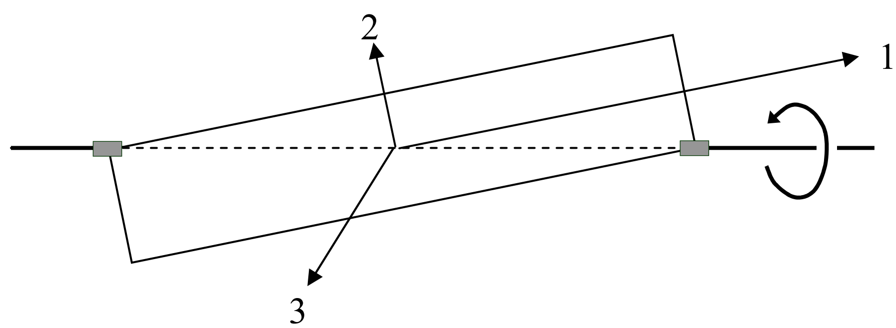
en idem voor y en z.

[f] Onder precessie van een gyroscoop wordt verstaan de draaiing van de rotatie-as (3-as) van de gyroscoop rond de vaste z-as. In het geval van een gyroscoop hebben we te maken met gedwongen precessie, die veroorzaakt wordt door het krachtmoment van de zwaartekracht op de massa hangend aan de gyroscoop. Meer in het algemeen is presessie de draaiing van de rotatie-as gezien vanuit het laboratoriumstelsel.

Nutatie is de oscillerende beweging van de hoek ϑ (om de x'-as). De nutatiebeweging hangt af van de begincondities. Het probleem kan worden geformuleerd in termen van een effectieve potentiële energie die van ϑ afhangt, en de hoek oscilleert dan tussen de punten waar de totale energie gelijk is aan deze potentiële energie.

2.

[a] Hoofdassen door het massamiddelpunt:



Traagheidsmomenten:

$$I_1 = \int r_\perp^2 dm = \int r_\perp^2 \rho D \; dx_1 dx_2 = \rho DL \int_{-B/2}^{B/2} x_2^2 \; dx_2 = \rho DL \left[\tfrac{1}{3} x_2^3 \right]_{-B/2}^{B/2} = 2 \tfrac{1}{24} \rho DLB^3 .$$

De massa is $m = \rho DBL$, dus

$$I_1 = \tfrac{1}{12} mB^2 .$$

Op analoge wijze vinden we

$$I_2 = \tfrac{1}{12} mL^2$$

En uit de loodrechte-assenstelling volgt

$$I_3 = I_1 + I_2 = \tfrac{1}{12} m \left(B^2 + L^2 \right).$$

In getallen:

$I_1 = 1{,}66 \cdot 10^{-3}$ kgm^2, $I_2 = 41{,}7 \cdot 10^{-3}$ kgm^2, en $I_3 = 43{,}3 \cdot 10^{-3}$ kgm^2.

[b] Het impulsmoment:

$$\vec{L} = \vec{\vec{I}} \cdot \vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ +\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -I_1 \cos\alpha \\ I_2 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

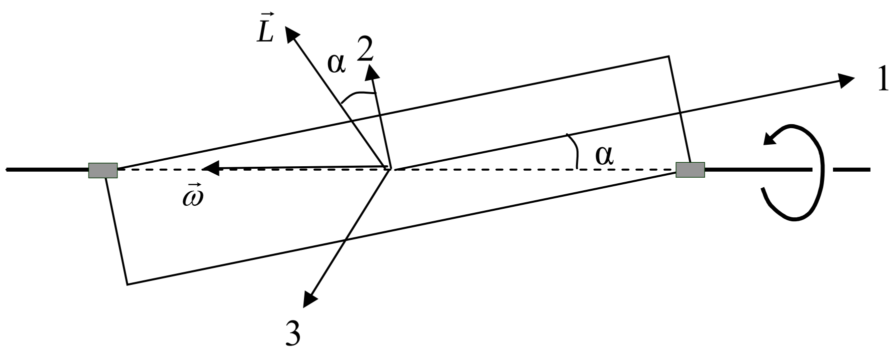
$$\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{L^2 + B^2}}$$

$$\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \tfrac{1}{12} m\omega BL \begin{pmatrix} -B/\sqrt{L^2+B^2} \\ +L/\sqrt{L^2+B^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In getallen:

$$\vec{L} = \tfrac{1}{12} 2(2\pi \cdot 2) \cdot 0.1 \cdot 0.5 \begin{pmatrix} -0.1/\sqrt{0.26} \\ +0.5/\sqrt{0.26} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.1047 \begin{pmatrix} -0.1961 \\ +0.9806 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.02045 \\ +1.0267 \\ 0 \end{pmatrix} \text{kgm}^2\text{/s.}$$

In figuur:



[c] Gebruik de Eulervergelijkingen. Het is een geforceerde rotatie, waarbij de hoeksnelheid constant wordt gehouden, dus de eerste term van de Eulervergelijking is nul:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) \\ \omega_1\omega_3(I_1 - I_3) \\ \omega_2\omega_1(I_2 - I_1) \end{pmatrix}.$$

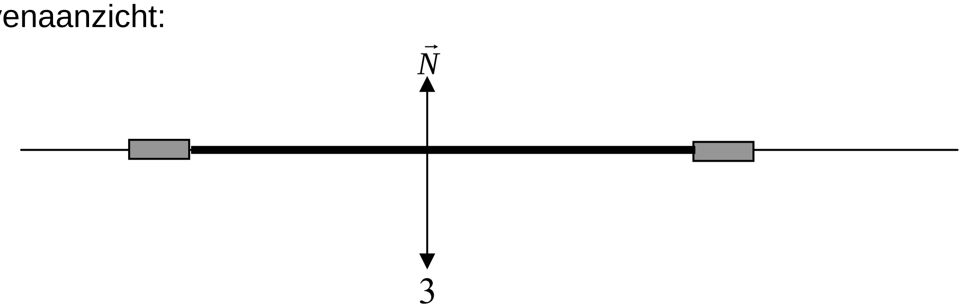
Verder geldt $\omega_3 = 0$, hetgeen de vergelijkingen reduceert tot:

$$N_3 = \omega_2\omega_1(I_2 - I_1) = -\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha \cdot \tfrac{1}{12} m(L^2 - B^2) = -\tfrac{1}{12} m\omega^2 \frac{BL}{L^2 + B^2}(L^2 - B^2)$$ In

getallen,

$N_3 = -1.215$ Nm.

Bovenaanzicht:

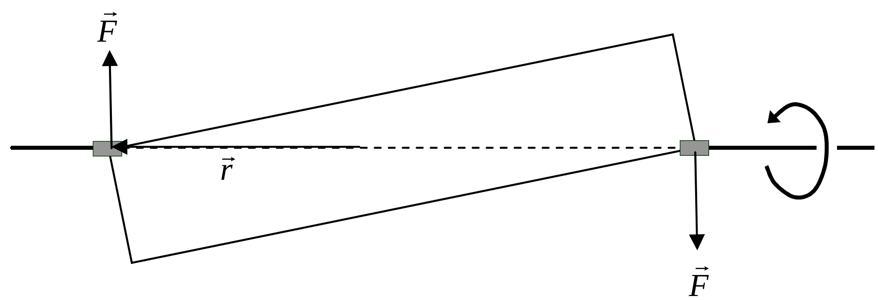


[d] De som van de krachten moet nul zijn (anders vliegt de plaat weg) en dus moeten de krachten op de twee lagers gelijk en tegengesteld zijn.

$$\vec{N} = 2\vec{r} \times \vec{F}; \quad |\vec{N}| = 2rF; \quad F = \frac{N}{2r}$$

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{L^2 + B^2}$$

Numeriek $\quad F = 2.38\,\text{N}$



Vooraanzicht. Het krachtmpoment is het blad <u>in</u> gericht

[e] Op tijdstip $t = 0$ wordt plotseling het krachtmoment nul. Vanaf dat moment is $\vec{L}$ een behouden grootheid. De impulsmomentvector ligt niet langs een hoofdas en $\vec{\omega}$ zal dus rond $\vec{L}$ roteren, met $\vec{L}$ in de richting die de vector heeft op het moment van loslaten.

3. [a] De gegeneraliseerde coördinaten zijn ϑ en φ. De cilinder rolt zonder slippen, dus de hoeken ϑ en φ worden door elkaar vastgelegd. Wanneer we bij $\vartheta = 0$ beginnen dan legt het contactpunt een afstand $R\vartheta$ over de binnenwand van d grote cilinder. Op de kleine cilinder verplaatst het contactpunt zich om een hoek $r(\varphi + \vartheta)$. De constraint is dus $R\vartheta - r(\varphi + \vartheta) = 0$. Hieruit volgt $\varphi = \dfrac{R-r}{r}\vartheta$.

Er is dus slechts één vrijheidsgraad.

[b] Kinetische energie

$$T = \tfrac{1}{2}m\left((R-r)\dot{\vartheta}\right)^2 + \tfrac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

$$I = \tfrac{1}{2}mr^2$$

$$T = \tfrac{1}{2}m\left[(R-r)^2\dot{\vartheta}^2 + \tfrac{1}{2}r^2\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\vartheta}^2\right] = \tfrac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\vartheta}^2$$

Potentiële energie

$$V(y) = mgy = mg(R-r)(1-\cos\vartheta)$$

Lagrangiaan

$$\mathcal{L} = T - V = \tfrac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\vartheta}^2 - mg(R-r)(1-\cos\vartheta)$$

[c] Lagrangevergelijking:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta}$$

Waaruit volgt

$$\tfrac{3}{2} m \left(R - r\right)^2 \ddot{\vartheta} = -mg\left(R - r\right)\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} + \tfrac{2}{3}\frac{g}{R - r}\sin\vartheta = 0$$

[d] $\vartheta << 1: \quad \sin\vartheta \approx \vartheta$.

Vergelijking wordt die van een harmonische oscillator met als oplossing

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\omega_0 t + \psi_0)$$

met

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3(R - r)}}\ .$$

[e] Slingertijd

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{3(R - r)}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = 4.44 \text{ s.}$$