Hertentamen Klassieke Mechanica II

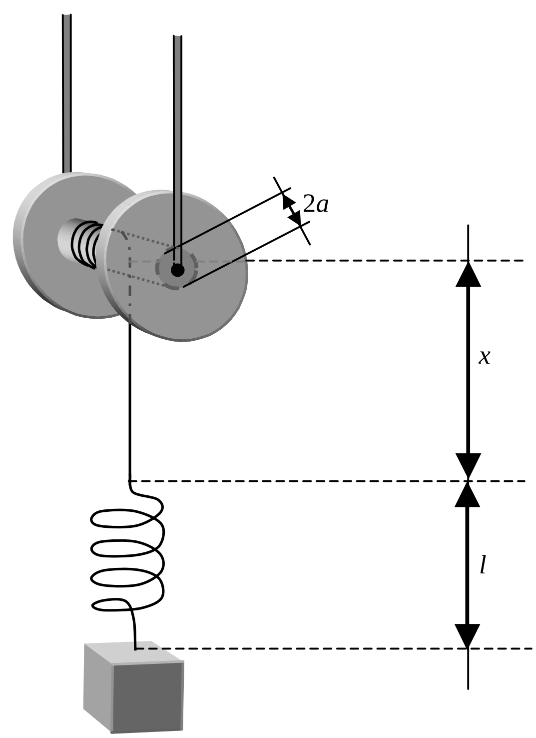
Woensdag 28 november 2001
Duur: 3 uur (9.00 – 12.00 uur)

Vermeld op elk blad duidelijk je naam en collegekaartnummer. Veel succes!

OPGAVE 1

Een massaloos koord is gewikkeld om een katrol met straal a en traagheidsmoment I. Aan het vrij afhangende uiteinde van het koord is een massaloze veer bevestigd, met veerconstante k, en aan het uiteinde van deze veer hangt een blok met massa m. Onder invloed van de zwaartekracht zal het koord van de katrol worden afgewikkeld. De lengte van het afhangende deel van het koord geven we aan met de coördinaat x, en de lengte van de veer met de coördinaat l (zie figuur).

a) Laat zien dat de kinetische energie behorend bij de rotatie van de katrol gelijk is aan $K_{rot} = \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2$. Geef ook een uitdrukking voor de kinetische energie behorend bij de daling van het blok.
b) Wat is de potentiële energie van dit systeem?
c) Schrijf de Lagrangiaan op van dit systeem en geef uitdrukkingen voor de gegeneraliseerde impulsen $\wp_x$ en $\wp_l$.
d) Leid de Lagrangevergelijkingen af voor x en l.



Na eliminatie van de tweede afgeleide $\ddot{x}$ uit de twee Lagrangevergelijkingen van d) krijgen we een enkele bewegingsvergelijking voor l, van de vorm $\ddot{l} = g - \omega^2 l$.

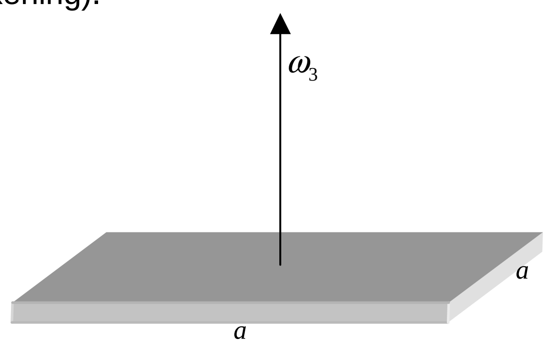
e) Geef een uitdrukking voor de oscillatie-frequentie ω. Leid ook af hoe groot de waarde l_0 is van l in evenwicht.

Een van de mogelijke oplossingen voor l luidt $l = l_0 + A\cos\omega t$, met vrij te kiezen amplitude A ($A < l_0$, zodat het koord wel voortdurend gespannen staat).

f) Geef voor dit geval de oplossing voor $x(t)$, voor de begincondities $x(0) = 0$ en $\dot{x}(0) = 0$.

OPGAVE 2

De componenten van het impulsmoment langs de hoofdtraagheidsassen van een vrij draaiend star voorwerp voldoen aan de Eulervergelijkingen $0 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2$, enz., waarbij I_i het hoofdtraagheidsmoment is en ω_i de component van de (momentane) hoeksnelheidsvector langs hoofdtraagheidsas i. We beschouwen een dunne, vierkante plaat, met verwaarloosbare dikte, met zijde a, en met homogene massa σ per oppervlakte-eenheid. De as door het middelpunt, loodrecht op het vlak van de plaat, nemen we als de derde hoofdtraagheidsas (zie tekening).

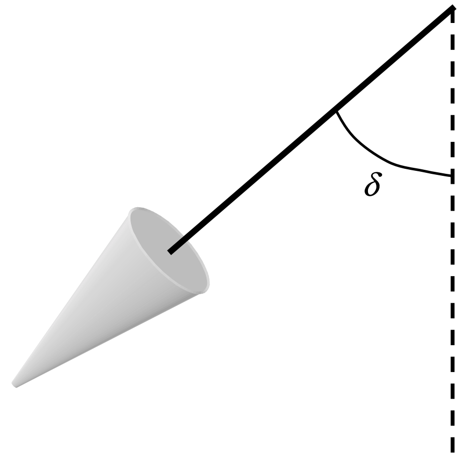


a) Met hoeveel hoofdtraagheidsassen kun je dit systeem beschrijven? Hangt dit af van de vorm van het beschouwde voorwerp?
b) Bereken de hoofdtraagheidsmomenten van de plaat. Beredeneer aan de hand van de gevonden uitdrukkingen hoeveel keuze-mogelijkheden er zijn voor de verzameling van hoofdtraagheids-assen.
c) Bewijs dat de componenten van de hoeksnelheid voldoen aan de vergelijkingen: $\dot{\omega}_1 = -\omega_2\omega_3$, $\dot{\omega}_2 = \omega_1\omega_3$ en $\dot{\omega}_3 = 0$.
d) Schrijf de bewegingsvergelijking op voor de complexe variabele $u \equiv \omega_1 + i\omega_2$ in termen van de constante ω_3.

De plaat roteert vrij om een as die een hoek α maakt met de derde hoofdas (loodrecht op de plaat), zodat $\omega_3 = \omega\cos\alpha$. De begincondities zijn $\omega_1(0) = \omega\sin\alpha$ en $\omega_2(0) = 0$.
e) Geef $\omega_1(t)$ en $\omega_2(t)$ als functie van de tijd. Los hiertoe de bij d) voor u opgestelde bewegingsvergelijking op, en neem hiervan de reële en imaginaire componenten.
f) Geef de componenten $L_i(t)$ van het impulsmoment langs de hoofdassen. Is de richting van de rotatie-as constant in de tijd?
g) Bereken de kinetische energie van de rotatie.

OPGAVE 3

De traagheidskrachten als gevolg van versnelling in een bewegende auto worden waargenomen door een vrij hangend schietlood (een gewicht aan een koord), waarvan de richting steeds samenvalt met de combinatie van de zwaartekrachtsversnelling plus de schijnversnellingen binnen het voertuig. Bij het begin van een rit trekt de auto eenparig versneld op, in een tijd τ, vanuit stilstand tot een snelheid v. Aan het eind van de rit remt de auto met constante remkracht af, in een tijd $\frac{1}{4}\tau$ van de snelheid v tot stilstand.



a) Reken uit in welke richting het schietlood hangt, zowel tijdens optrekken als bij het afremmen. Geef zowel de hoek aan die het koord maakt met de verticaal, als de horizontale richting van de afwijking. Laat hierbij de versnellingen ten gevolge van de aardrotatie buiten beschouwing.

Nu bekijken we het geval dat de auto met constante snelheid een bocht maakt, die beschreven kan worden als een deel van een cirkel met een straal R.

b) Reken opnieuw de stand uit van het schietlood (laat opnieuw de aardrotatie buiten beschouwing).

We beschouwen tenslotte een vliegtuig dat op breedtegraad θ (noordelijk halfrond) met constante snelheid v en op constante hoogte naar het noorden vliegt. Neem aan dat de aarde een perfecte bolvorm heeft, en dat de beweging op elk moment als rechtlijnig kan worden beschouwd.

c) Geef de scheefstand aan van het schietlood, die door de Coriolisversnelling wordt veroorzaakt (dus opnieuw de grootte van de hoek en de richting). Breng hierbij uitsluitend de horizontale component van de Coriolisversnelling in rekening en verwaarloos het effect van de eventueel aanwezige verticale component. Laat ook de centrifugaalversnelling ten gevolge van de aardrotatie buiten beschouwing.

d) Beantwoord dezelfde vraag voor het geval dat het vliegtuig naar het noordoosten vliegt.

e) Als de snelheid van het vliegtuig v ten opzichte van het aardoppervlak bekend is, wat kan je dan uit de scheefstand afleiden? Suggesties:
   - vlieghoogte
   - vliegrichting (O,W,N,Z, etc)
   - positie op aarde in noord-zuid richting: poolhoek θ
   - positie op aarde in oost-west richting: azimut ϕ
   - andere grootheden...