

**TENTAMEN KLASSIEKE MECHANICA 2**  
Bij het college van Prof. J.M. van Ruitenbeek  
29 november 2004, 14 -17 uur

Schrijf op elk vel dat u inlevert uw NAAM en STUDIERICHTING en COLLEGEKAARTNUMMER.

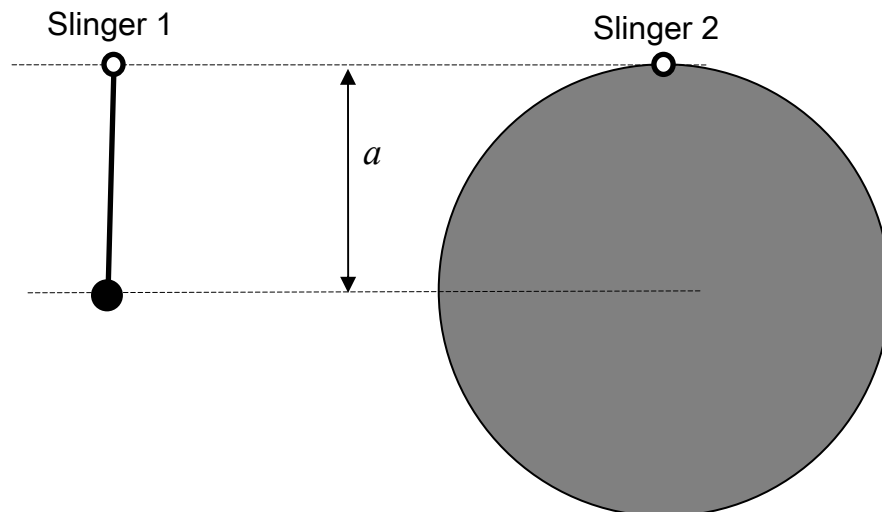
Het tentamen bestaat uit vier onderdelen.

1. Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen.

[a] Bereken het massamiddelpunt van een massieve halve bol.

[b] We vergelijken twee slingers: (1) De eerste bestaat uit een puntvormige massa  $m$  aan een dunne, zeer lichte staaf met lengte  $a$ . (2) De tweede bestaat uit een massieve schijf met straal  $a$ , gelijk aan de lengte van de staaf van (1), en totale massa  $m$ , gelijk aan die van (1). De schijf kan vrij slingeren rond een punt aan de rand.

Hebben slinger (1) en (2) dezelfde slingertijd? Geef argumenten. Zoniet, welke van de twee heeft de langste slingertijd? Waarom?



[c] De verandering van het impulsmoment wordt in het algemeen bepaald door het totale krachtmoment volgens

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (*)$$

Net als in het geval van de wetten van Newton voor lineaire bewegingen is deze relatie geldig in een inertiaalstelsel. Echter, voor rotaties is er een speciaal geval: zelfs in een versneld systeem geldt de relatie (\*) op voorwaarde dat het assenstelsel aan een bepaalde eis voldoet. Welke is dat?

Wordt vervolgd op achterzijde...

[d] Geef de Eulervergelijkingen.

[e] Bekijk een lichaam met een as van symmetrie, dat vrij kan roteren in de ruimte, zonder extern krachtmoment. Geef een korte afleiding van de periode van de draaiing van de rotatieas om de symmetrieas.

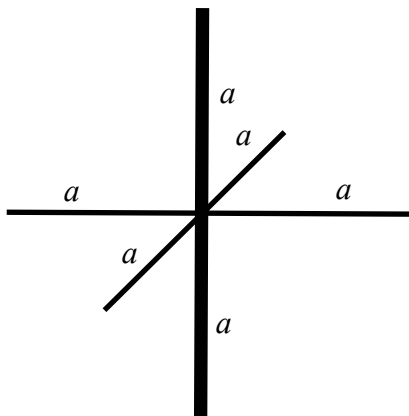
[f] De Lagrangiaan voor een systeem met gegeneraliseerde coördinaten  $q_1$  en  $q_2$  wordt gegeven door de uitdrukking

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) - mgl(1 - \cos q_1).$$

Leidt de Hamiltoniaan af voor dit systeem gebruikmakend van de algemene definitie.

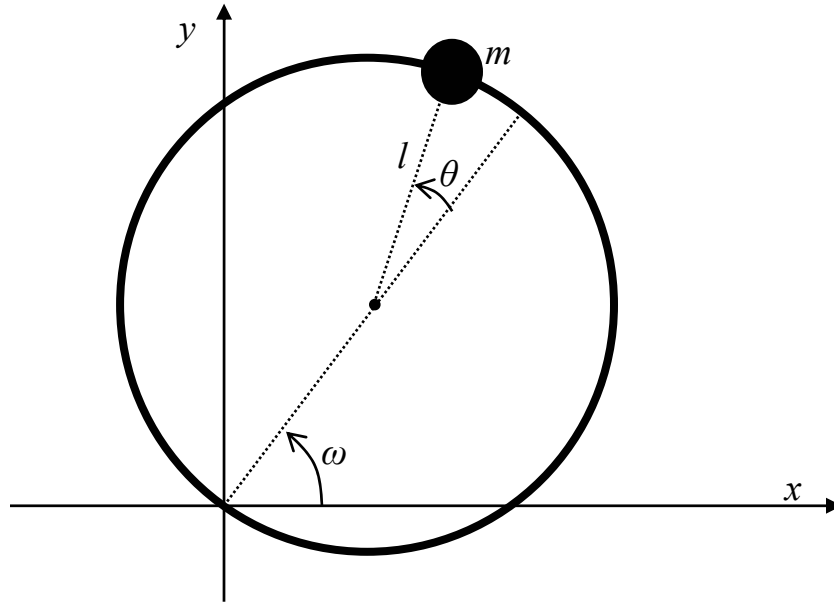
2. Een wagentje rijdt over een cirkelvormig stuk van een achtbaan dat horizontaal ligt en een diameter  $P$  heeft. Verwaarloos wrijving. Gebruik de methode van Lagrange om de kracht als functie van de positie te bepalen die de rails op het wagentje uitoefent.

3. Een vast lichaam bestaat uit drie onderling loodrechte, uniform dunne staven, elk met lengte  $2a$ , die in het midden met elkaar verbonden zijn. Twee van de staven hebben een massa  $m$  en de derde heeft een massa  $2m$ . Kies een coördinatensysteem met de assen langs de staven. Bepaal het impulsmoment en de kinetische energie van het lichaam wanneer gegeven is dat het roteert met een hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  om een as door de oorsprong en het punt  $(1,1,1)$ . Bereken de hoek tussen  $\vec{L}$  en  $\vec{\omega}$  en geef deze vectoren weer in een figuur.



Wordt vervolgd op volgende blad...

4. Een kraal met massa  $m$  wordt gedwongen te bewegen langs een dunne cirkelvormige ring met straal  $l$ , die roteert in een horizontaal vlak (het  $x,y$ -vlak) rond een punt op de ring. De hoeksnelheid  $\omega$  is constant, zie figuur. Verwaarloos de wrijving.



- [a] Bepaal de bewegingsvergelijkingen van Lagrange voor dit probleem.
- [b] Laat zien dat de kraal als een slinger oscilleert rond het punt op de ring dat precies tegenover het draaipunt ligt.
- [c] Hoe verandert de oscillatiefrequentie van de kraal rond het evenwichtspunt met de hoeksnelheid van de ring? Is dit wat je verwacht? Waarom?

EIND