Klassieke Mechanica b (2010-2011). Hertentamen 07 Januari 2011, 14:00-17:00

OPGAVE 1

Een vast voorwerp heeft de vorm van een massieve piramide met vierkante basis, zijde a, massa m. De hoogte van de piramide is h. De massadichtheid in de piramide is constant en gelijk aan ρ. Wij kiezen de punt als oorsprong O, Oz is de symmetrieas van de piramide en de richtingen Ox en Oy kiezen wij langs 2 kanten van de basis.

a) Vind de positie van het zwaartepunt.

b) Vind de waarden van de traagheidsmomenten ten opzichte van punt O en van de drie assen Ox, Oy en Oz. Maak zoveel mogelijk gebruik van theorema's over traagheidsmomenten. Beschrijf het resultaat met behulp van a, m en h.

c) Wij laten nu dit voorwerp kleine rotatieoscillaties doormaken rond punt O in het zwaartekrachtsveld $\vec{g} = -g\hat{z}$ ($\hat{z}$ is de eenheidsvector in de Oz richting). Vind de periodes van deze oscillaties om rotatieas Ox en om rotatieas $O\lambda$, waar $\hat{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$ een eenheidsvector van de Oxy vlakte is die met Ox een hoek van 45° maakt.

OPGAVE 2

Een massieve plaat heeft een vierkante vorm met zijde a en verwaarloosbare dikte. De massa van de plaat is m. De plaat kan in 3 dimensies draaien rond een punt M van zijn kant op positie $a/4$ van een van de hoeken, punt O. Wij kiezen assen Ox en Oy langs de kanten van de vierhoek en as Oz als de normale as tot de plaat. De coördinaten van M in dit stelsel zijn ($x_M = a/4$, $y_M = 0$, $z_M = 0$).

a) Vind de traagheidsmomenten en traagheidsproducten ten opzichte van punt M in het $Mxyz$ assenstelsel, en schrijf de matrix van de traagheidstensor in dit stelsel. Zijn Mx, My en Mz hoofdassen van deze tensor?

b) Vind de hoofdtraagheidsmomenten van de tensor door de matrix te diagonaliseren (merk op dat een van de hoofdassen al bekend is).

Hoe kun je de richtingen van de hoofdassen bepalen? Je hoeft dat niet expliciet te doen.

Wij verwaarlozen de zwaartekracht. De plaat voert een vrije rotatie rond het vaste punt M door met een rotatievector $\vec{\omega}$ die met de tijd kan veranderen. Het impulsmoment van de plaat ten opzichte van punt M is dus constant.

c) Geef een kort bewijs van de Eulervergelijkingen, die de tijdsafhankelijke componenten van de rotatievector in het hoofdassenstelsel bepalen.

OPGAVE 3

Een voorwerp heeft de vorm van een halve cilinder met straal a, hoogte h, massa m. Dit voorwerp werd gesneden uit een cilinder zodat de cilinderas in het snijvlak ligt. Het voorwerp rust op een vlakke horizontale tafel op zijn ronde kant en kan zonder dissipatie en zonder slip op de tafel rollen.

a) Vind de afstand l_{CM} tussen de cilinderas en het zwaartepunt.

b) Toon aan dat de voorwerppositie waar het snijvlak horizontaal is een stabiele evenwichtspositie is.

Wij laten nu het voorwerp oscilleren rond deze evenwichtspositie. Wij noemen θ de hoek tussen de tafel en het snijvlak van het voorwerp en x de afstand van de contactlijn tussen tafel en voorwerp ten opzichte van de evenwichtscontactlijn.

c) Leg uit waarom de relatie tussen θ en x holonomisch is. Concludeer daaruit dat slechts één gegeneraliseerde coördinaat de beweging beschrijft.

d) Schrijf de Lagrangiaan als een functie van θ en $\dot{\theta}$ (Hint: merk op dat de instantane beweging een rotatie rond de contactlijn is alsof deze vast zat. Maak gebruik van de theorema's over traagheidsmomenten).

e) Vind de periode van de kleine oscillaties van dit voorwerp.