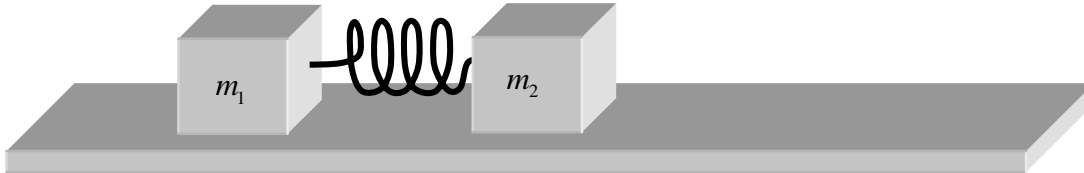


Tentamen Klassieke Mechanica II

Dinsdag 23 oktober 2001
Duur: 3 uur (14.00 – 17.00 uur)

Vermeld op elk blad duidelijk je naam en collegekaartnummer. Veel succes!

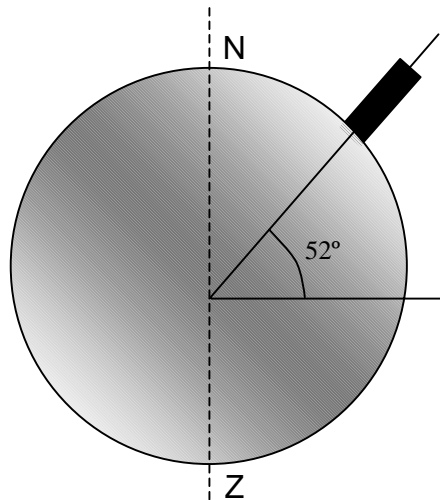
OPGAVE 1



Twee blokken, met massa's m_1 en m_2 zijn verbonden door een massaloze, ideale veer met veerconstante k . De blokken liggen op een horizontale, vlakke ondergrond, waarover ze zonder wrijving kunnen glijden. We beschouwen in deze opgave uitsluitend bewegingen van de blokken in de lengterichting van de veer.

- Hoeveel vrijheidsgraden van beweging heeft het beschouwde systeem? Schrijf tenminste twee combinaties op van zinvolle gegeneraliseerde coördinaten waarmee je de bewegingen van dit systeem kunt beschrijven.
- Stel de Lagrangefunctie op van het systeem, uitgedrukt in Cartesische coördinaten.
- Leid uit het resultaat bij b) de Lagrangevergelijking(en) af voor dit systeem. Is er sprake van beperkingen ("constraints")?
- Laat zien dat je door handig gekozen lineaire combinaties te maken van de resultaten bij c), bewegingsvergelijkingen krijgt, waarin telkens uitsluitend één (gegeneraliseerde) coördinaat voorkomt.
- Los de bewegingsvergelijking(en) van d) op. Wat voor beweging(en) beschrijven ze.
- Geef de bewegingsvergelijkingen voor de twee blokken, $x_1(t)$ en $x_2(t)$ uitgaande van een beginsituatie ($t = 0$) waarbij de veer in ruststand is, blok 1 stilligt, en blok 2 met een beginsnelheid beweegt van v_0 .

OPGAVE 2



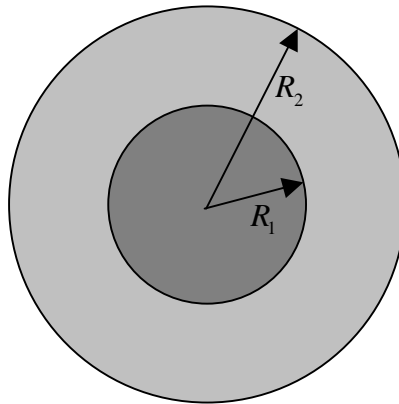
We beschouwen een hoge torenflat in Leiden (52° noorderbreedte). Verwaarloos in deze opgave de variatie in de zwaartekrachtsversnelling tussen de begane grond en de hoogste verdieping, en verwaarloos ook alle effecten van wrijving (bijvoorbeeld van de lucht).

- De torenflat is verticaal gebouwd. Als je door de flat een denkbeeldige, verticale lijn zou trekken, zou die lijn dan precies door het centrum van de aarde lopen? Beredeneer je antwoord.
- Stel je voor dat je je binnen de flat in een lift bevindt. De lift staat stil. Welke krachten ondervind je dan ten opzichte van de lift? Geef voor elke kracht aan hoe groot de componenten zijn in de richtingen van de N-, O-, Z-, en W-zijden van de lift, en in de richting van de bodem of het plafond van de lift. In welke richting staat de resultante?
- Nu beweegt de lift met constante snelheid v naar boven. Beantwoord dezelfde vragen als bij b).
- Helemaal boven aangekomen breekt de liftkabel en voert de lift een "vrije" val uit. Bij deze val beweegt de lift zich noodzakelijkerwijs strikt verticaal in de liftschacht van de (verticale) torenflat. Beantwoord opnieuw dezelfde vragen als bij b) en c).
- We schieten nu de lift vanaf de begane grond in de liftschacht naar boven met beginsnelheid v_0 (de liftkabel ontbreekt). Maak drie grafieken van de krachten die je ten opzichte van de lift ondervindt in de N-Z richting, de O-W richting en in de boven-onder richting als functie van de tijd. Beschouw hierbij het volledige tijdsinterval vanaf direct na de "lancering" tot vlak voor de "landing".
- Bij het "lanceer-experiment" van e) bevind je je bij de lancering in het midden van de vloer van de lift. Reken uit op welke positie je je bevindt op het moment van de landing, als de opwaartse beginsnelheid bij de lancering 200 m/s bedraagt. Ook de wrijving met het vloeroppervlak mag hier worden verwaarloosd.
- Als de lift niet in de liftschacht maar naast de torenflat, precies verticaal gelanceerd wordt, welke krachten ondervind je dan ten opzichte van de lift?

OPGAVE 3

In het college hebben we afgeleid hoe de potentiële energie van een testmassa met massa m varieert als functie van de afstand r tot het centrum van een dunne, bolvormige schijf met massa M en straal a , voor zowel $r > a$ als $r < a$.

- Reken uit hoe de potentiële energie $V(r)$ van de testmassa varieert met de diepte binnen een planeet met straal R en met constante dichtheid ρ .
- Gebruik het resultaat van a) om uit te rekenen hoe de zwaartekracht varieert als functie van de diepte binnen de planeet.
- We boren een diep, verticaal gat in een planeet en meten de zwaartekrachtsversnelling als functie van de diepte. Tot onze verbazing hangt de versnelling *niet* af van de diepte. Wat leren we hieruit over de diepteafhankelijkheid van de dichtheid $\rho(r)$ van de planeet?



Beschouw nu het geval van een planeet waarvan het binnenste gedeelte, met straal R_1 , een hoge dichtheid ρ_1 heeft, en zich daaromheen een mantel bevindt met straal R_2 en een lagere dichtheid ρ_2 .

- Leid voor deze situatie af hoe de potentiële energie en de zwaartekrachtsversnelling afhangen van de afstand tot het centrum, voor elk van de drie afstandsgebieden: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, en $r > R_2$. Maak van het resultaat twee grafieken (potentiële energie en zwaartekrachtsversnelling als functie van r).
- Kan je door metingen van de zwaartekrachtsversnelling als functie van de diepte, voor $R_1 < r < R_2$, bepalen hoe groot ρ_1 en R_1 zijn?