Uitwerking hertentamen Klassieke Mechanica II

28 november 2001

OPGAVE 1

a) $K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2$

$K_{trans} = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}+\dot{l}\right)^2$

b) $V = -mg\left(x+l\right)+\frac{1}{2}kl^2$. Voor het gemak is hier de rustlengte van de veer op nul gesteld.

c) Lagrangiaan: $L = K - V = \frac{1}{2} I\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}+\dot{l}\right)^2 + mg\left(x+l\right) - \frac{1}{2}kl^2$

Gegeneraliseerde impulsen: $\wp_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{I}{a^2}\dot{x} + m\left(\dot{x}+\dot{l}\right)$ en $\wp_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = m\left(\dot{x}+\dot{l}\right)$.

d) Lagrangevergelijkingen voor x en l:

$$\frac{d}{dt}\wp_x - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{I}{a^2}+m\right)\ddot{x} + m\ddot{l} - mg = 0$$

$$\frac{d}{dt}\wp_l - \frac{\partial L}{\partial l} = 0 \quad\Rightarrow\quad m\ddot{x} + m\ddot{l} - mg + kl = 0$$

e) $\left(\frac{I}{ma^2}+1\right)$ maal de 2e Lagrangevergelijking aftrekken van de 1e levert:

$$\left(m\ddot{l}-mg\right)\left[1-\left(\frac{I}{ma^2}+1\right)\right] - kl\left(\frac{I}{ma^2}+1\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{l} = g - \frac{k}{m}\left(1+\frac{ma^2}{I}\right)l \equiv g - \omega^2 l$$

$$\Rightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{ma^2}{I}\right)}$$

"Evenwicht" betekent dat de veer *niet oscilleert*: $\ddot{l} = 0 \quad\Rightarrow\quad l_0 = \frac{g}{\omega^2} = \frac{mg}{k}\frac{1}{1+ma^2/I}$

f) Trek de twee Lagrangevergelijkingen van d) direct van elkaar af:

$$\ddot{x}(t) = \frac{kla^2}{I} = \frac{ka^2}{I}\left(l_0 + A\cos\omega t\right) \quad\Rightarrow\quad \dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \frac{ka^2}{I}\left(l_0 t + \frac{A}{\omega}\sin\omega t\right) \quad\Rightarrow$$

$$x(t) = \dot{x}(0)t + \frac{ka^2}{I}\left(\frac{1}{2}l_0 t^2 - \frac{A}{\omega^2}\cos\omega t\right) + const.$$

Invullen van de begincondities, $x(0)=0$ en $\dot{x}(0)=0$, en $l_0 = \frac{g}{\omega^2}$ (zie e) geeft:

$$x(t) = \frac{ka^2}{I\omega^2}\left[\frac{1}{2}gt^2 + A\left(1-\cos\omega t\right)\right].$$

OPGAVE 2

a) Elk voorwerp, dus ook de hier beschouwde platte, vierkante plaat, kun je beschrijven met drie, onderling loodrechte hoofdtraagheidsassen. Dit hangt niet af van de vorm van het beschouwde voorwerp (zie ook b).

b) We kiezen de twee hoofdassen in het vlak van de plaat parallel aan de zijden van het vierkant (en uiteraard door het centrum van de plaat):

$I_{1,2} = 2a \int_0^{a/2} \sigma x^2 dx = \frac{1}{12}\sigma a^4 = \frac{1}{12} Ma^2$. Voor de derde as vinden we:

$$I_3 = 4\sigma \int_0^{a/2} dx \int_0^{a/2} dy \left(x^2 + y^2\right) = 4\sigma \int_0^{a/2} dx \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3\right]_{y=0}^{y=a/2} = 4\sigma \cdot \tfrac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^4 = \tfrac{1}{6}\sigma a^4 = \tfrac{1}{6} Ma^2 .$$

Omdat $I_1 = I_2$, is ook elke lineaire combinatie van de hoofdassen $\hat{x}_1$ en $\hat{x}_2$ bruikbaar als hoofdas. Deze alternatieve keuzen voor $\hat{x}_1$ en $\hat{x}_2$ liggen allen in het vlak van de plaat en lopen allen door het centrum. Het aantal mogelijke combinaties van drie hoofdassen $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ is dus oneindig groot.

c) Gebruik de Eulervergelijkingen

$$\begin{cases} I\dot{\omega}_1 + \left(I_3 - I_2\right)\omega_3\omega_2 = 0 \\ I\dot{\omega}_2 + \left(I_1 - I_3\right)\omega_1\omega_3 = 0 \\ I\dot{\omega}_3 + \left(I_2 - I_1\right)\omega_2\omega_1 = 0 \end{cases}$$

en vul in $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3$ (zie b). Het resultaat is $\dot{\omega}_1 = -\omega_3\omega_2$, $\dot{\omega}_2 = \omega_1\omega_3$ en $\dot{\omega}_3 = 0$.

d) $u = \omega_1 + i\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = \dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2 = -\omega_2\omega_3 + i\omega_1\omega_3 = i\omega_3\left(\omega_1 + i\omega_2\right) = i\omega_3 u$

e) De oplossing van de bewegingsvergelijking voor u in d) is:
$u(t) = u_0 \exp\left(i\omega_3 t\right) = u_0 \cos\omega_3 t + iu_0 \sin\omega_3 t$. De amplitude u_0 is in principe complex en hangt af van de begincondities: $\mathrm{Re}\left(u(0)\right) = \omega_1(0) = \omega\sin\alpha; \quad \mathrm{Im}\left(u(0)\right) = \omega_2(0) = 0$.
We zien dat u_0 in dit geval reëel is, namelijk $u_0 = \omega\sin\alpha$. We vinden:
$u(t) = \omega\sin\alpha\exp\left(i\omega_3 t\right)$, zodat $\omega_1(t) = \mathrm{Re}\left(u(t)\right) = \omega\sin\alpha\cos\omega_3 t$
en $\omega_2(t) = \mathrm{Im}\left(u(t)\right) = \omega\sin\alpha\sin\omega_3 t$.

f) $L_i(t) = I_i\omega_i(t)$. Gebruik nu de traagheidsmomenten die bij b) werden gevraagd en de bij e) gevonden hoeksnelheden (en $\omega_3 = \omega\cos\alpha$):

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{12}\sigma a^4 \omega\sin\alpha\cos\omega_3 t \\ L_2 = \frac{1}{12}\sigma a^4 \omega\sin\alpha\sin\omega_3 t \\ L_3 = \frac{1}{6}\sigma a^4 \omega\cos\alpha \end{cases}$$

Uiteraard is de richting van $\vec{L}$ constant in de tijd (wet van behoud van impulsmoment). Echter, de componenten L_i ten opzichte van de hoofdassen van het tuimelende voorwerp hoeven niet constant te zijn!
De richting van de rotatie-as van het voorwerp zou constant zijn als de verhoudingen tussen ω_1, ω_2 en ω_3 gelijk zouden zijn aan die tussen L_1, L_2 en L_3. Dat gebeurt uitsluitend als $I_1 = I_2 = I_3$ (vergelijk de oplossingen bij e) en f)).

g) $K_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{24}\sigma a^4\omega^2\left\{\sin^2\alpha\left[\cos^2\omega_3 t + \sin^2\omega_3 t\right] + 2\cos^2\alpha\right\} = \frac{1}{24}\sigma a^4\omega^2\left(1+\cos^2\alpha\right)$.

OPGAVE 3

a) Tijdens het optrekken hangt het schietlood naar achteren, met $\tan\delta = \frac{a}{g} = \frac{v}{g\tau}$.

Tijdens het afremmen hangt het schietlood naar voren, met $\tan\delta = \frac{4v}{g\tau}$.

b) Hier speelt de centrifugaalversnelling de hoofdrol: $\vec{a}_{cf} = -\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)$. De grootte van deze versnelling bedraagt $\omega^2 R$, en de richting is naar buiten (weg van het centrum van de cirkel). De hoeksnelheid ω is $\omega = \frac{v}{R}$. Dus $a_{cf} = \frac{v^2}{R}$. Het schietlood hangt dus scheef, naar buiten, met een hoek met $\tan\delta = \frac{v^2}{gR}$.

c) De Coriolisversnelling is $\vec{a}_{cor} = -2\vec{\omega}\times\vec{v}$. De grootte hiervan bedraagt $2\omega v\sin\theta$, waarbij de hoeksnelheid die van de aardrotatie is. Voor een naar het noorden vliegend vliegtuig op het noordelijk halfrond is deze versnelling naar het oosten gericht. De resulterende scheefstand van het schietlood naar rechts bedraagt $\tan\delta = \frac{2\omega v\sin\theta}{g}$.

d) Ontbind nu $\vec{a}_{cor}$ in twee componenten, afkomstig van de snelheidscomponenten v_N en v_O van het vliegtuig naar het noorden en naar het oosten: $v_N = v_O = \frac{1}{2}\sqrt{2}v$. Dit geeft $\vec{a}_{cor}^{N} = -2\vec{\omega}\times\vec{v}_N = \sqrt{2}\omega v\sin\theta\,\hat{x}_O$, waarbij $\hat{x}_O$ de eenheidsvector is naar het oosten. $\vec{a}_{cor}^{O} = -2\vec{\omega}\times\vec{v}_O = \sqrt{2}\omega v\,\hat{x}_e$, waarbij $\hat{x}_e$ de eenheidsvector is loodrecht op de rotatie-as, in het vlak van deze as en de positie van het vliegtuig. De component van deze laatste versnelling in het (locale) horizontale vlak is $\vec{a}_{cor}^{O,hor} = \sqrt{2}\omega v\sin\theta\,\hat{x}_Z$ naar het zuiden. De eerste component, $\vec{a}_{cor}^{N}$, ligt geheel in het horizontale vlak. De twee (horizontale) componenten van $\vec{a}_{cor}$ staan loodrecht op elkaar en zijn even groot. Samen leveren ze een versnelling op van $2\omega v\sin\theta$ naar het zuidoosten, dus evengroot als bij c), en opnieuw naar “rechts”. Opnieuw is dus de scheefstand van het schietlood naar rechts gelijk aan $\tan\delta = \frac{2\omega v\sin\theta}{g}$.

e) In de bij c) en d) gevonden uitdrukking voor $\tan\delta$ komt behalve de bekende snelheid van het vliegtuig, de tevens bekende zwaartekrachtsversnelling en de rotatiesnelheid van de aarde, uitsluitend de poolhoek θ voor. Dat is het enige wat je uit de grootte van de scheefstand kunt afleiden. De richting van de scheefstand, links of rechts, vertelt je bovendien of je op het noordelijk halfrond zit of op het zuidelijk halfrond, maar dat kun je formeel beschouwen als informatie die al besloten ligt in het teken van δ en die daarom tot uiting komt in het teken van θ.