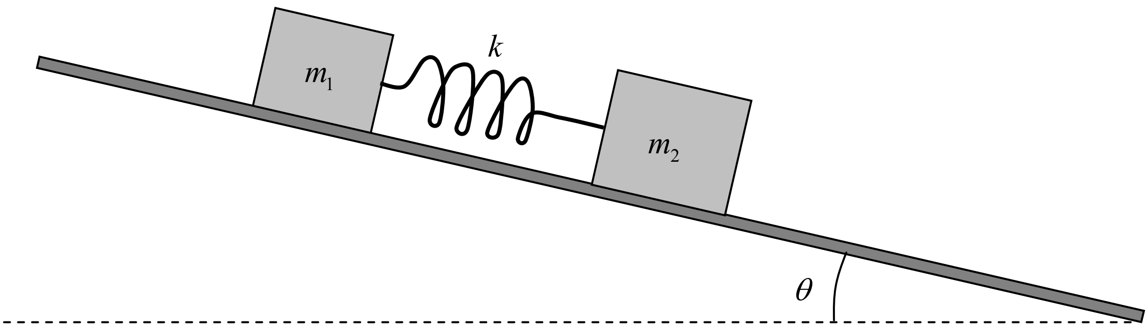
**Tentamen Klassieke Mechanica II**
**Maandag 21 oktober 2002**
**Duur: 3 uur**

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam**, **studierichting**, en evt. **collegekaartnummer**! (TIP: lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag)

**Uitslag**: over ca. 2 weken bij studentenadministratie en op de KM2-webpagina. Als je bezwaar hebt tegen vermelding van je uitslag op de webpagina, geef dit dan duidelijk aan op het eerste blad.

<u>OPGAVE 1: Hellend vlak</u>

Twee blokken met ongelijke massa's $m_1$ en $m_2$ liggen op een hellend vlak met hellingshoek $\theta$ (zie tekening). De blokken zijn onderling verbonden door een ideale veer met veerconstante $k$. De blokken glijden wrijvingsloos over het vlak. Blokken en veer bevinden zich in het vlak van de tekening en ook hun bewegingen vinden uitsluitend in dit vlak plaats.




a) Hoeveel coördinaten $n$ heb je nodig om het systeem volledig te beschrijven, en hoeveel vrijheidsgraden $m$ heeft het systeem?
b) Kies een handig coördinatenstelsel en stel de $n$ Lagrangevergelijkingen op; houd hierbij dus nog geen rekening met eventuele beperkingen ("constraints").
c) Welke beperking(en) zijn dit systeem opgelegd en welk effect heeft dat op de Lagrangevergelijkingen van b)? Bepaal de met deze beperkingen geassocieerde krachten ("constraint forces").
d) Het is mogelijk om handige lineaire combinaties te kiezen van de Lagrange-vergelijkingen, zodat in elke gecombineerde vergelijking slechts één lineaire combinatie van coördinaten (incl. tijdsafgeleiden daarvan) optreedt. Vind die combinaties en bepaal voor elk de oplossing. Beschrijf het resultaat ook in woorden.
e) Als beginsituatie houden we nu blok $m_1$ vast en laten we blok $m_2$ vrij hangen (in stilstand). Op tijdstip $t=0$ wordt $m_1$ losgelaten. Geef voor deze situatie de volledige oplossing (posities van beide blokken als functie van tijd).
f) Als de blokken wrijving ondervinden van het vlak, met wrijvingsconstante $\mu$, welke veranderingen introduceert dit in de Lagrangevergelijkingen? Beschrijf in woorden wat er zal veranderen aan de bij d) bepaalde oplossingen.

OPGAVE 2: Foucault's Peugeot

Een auto rijdt met constante snelheid $v$ bij Leiden (52$^\circ$NB) op de A44 naar het noorden.

a) Welke versnellingen werken op de auto? Houd in je antwoord rekening met de aardrotatie. Geef uitdrukkingen voor de grootte van elk van deze versnellingen.

Alle versnellingen die niet van de snelheid van de auto afhangen nemen we samen in een effectieve zwaartekrachtsversnelling $\vec{g}_{eff}$. We nemen aan dat het verschil met de echte zwaartekrachtsversnelling zo klein is dat we $\vec{g}_{eff}$ gericht kunnen denken naar het middelpunt van de aarde. Bovendien nemen we aan dat de aarde een perfecte bolvorm heeft.

b) Hoe hangt het resterende deel van de versnellingen af van de snelheid van de auto? Geef zowel de grootte als de richting. Druk de richting uit t.o.v. een locaal, Leids coördinatenstelsel, dus bijvoorbeeld met de $x$-as naar het oosten, de $y$-as naar het noorden en de $z$-as loodrecht op het aardoppervlak (omhoog).

Nu rijdt de auto niet meer naar het noorden maar in een richting die een hoek $\phi$ maakt met het noorden.

c) Beantwoord dezelfde vraag als bij b).

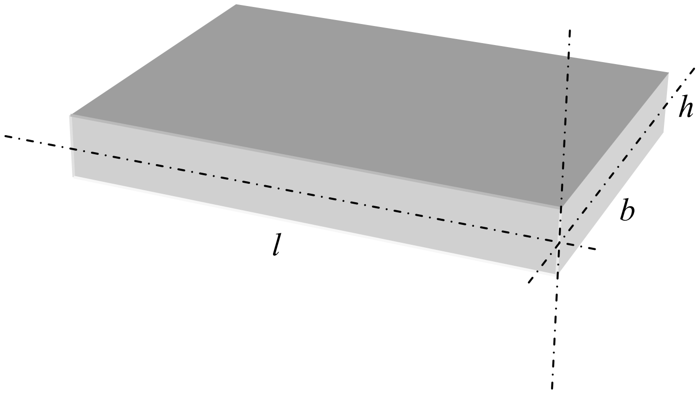
d) Laat zien dat de grootte van de horizontale component van de bij c) bepaalde versnelling niet van $\phi$ afhangt en dat de richting van die kracht een vaste relatie heeft tot de rijrichting $\phi$.

e) Laat zien dat, als de bestuurder met losse handen rijdt en zijn auto volledig op de bij c) en d) bepaalde horizontale component van de versnelling reageert, de auto in een cirkel zal rijden. In welke richting cirkelt de auto en hoe groot is de straal van de cirkel? Hoe lang duurt een rondje?

f) Hoe lang duurt een rondje in de buurt van de noordpool? Klopt dit resultaat met je verwachting? Zonee, wat veroorzaakt het verschil?

OPGAVE 3: Tuimelende blokken

We beschouwen de rotatiebewegingen van een rechthoekig blok met homogene massaverdeling (dichtheid $\rho$) en met afmetingen $h < b < l$ (zie tekening).




a) Bereken het traagheidsmoment van dit blok t.o.v. een as loodrecht op het $lb$-vlak, langs een van de randen van het blok (zie tekening). Reken, voor de keuze van de twee andere assen, zoals in de tekening aangegeven, de drie traagheids*producten* (let op: niet de momenten) uit.

b) Rondom welke van de aangegeven assen kan het blok uitsluitend onder invloed van een krachtmoment draaien?

We concentreren ons nu op vrije rotaties van het blok (geen krachtmomenten), die we beschrijven m.b.v. de hoofdtraagheidsmomenten $I_1 < I_2 < I_3$ (bedenk zelf in welke richtingen t.o.v. het blok de drie bedoelde hoofdassen staan).

c) Stel de Eulervergelijkingen op.

Voor een symmetrisch object, met $I_1 = I_2 \neq I_3$, hebben we gezien dat de rotatievector $\vec{\omega}$ beschreven kan worden als een constante component $\omega_3$ langs de lichaamsas (richting 3) en een component van constante grootte, loodrecht op de lichaamsas, die met een vaste hoeksnelheid om de lichaamsas draait. Voor het blok, met $I_1 < I_2 < I_3$, testen we nu of we vergelijkbaar gedrag mogen verwachten. Hiertoe gaan we uit van een rotatievector die vrijwel precies langs een van de hoofdassen ligt, en beschouwen het effect van een kleine component loodrecht daarop.

d) Ga uit van een rotatie vrijwel precies rond richting 3, zodat $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$. Neem aan dat $\omega_3 = \text{constant}$. Gebruik deze informatie om de Eulervergelijkingen voor $\dot{\omega}_1$ en $\dot{\omega}_2$ te vereenvoudigen, en los deze twee vergelijkingen op.

   (Tip: gebruik voor deze componenten als probeeroplossing $\omega_{1,2}(t) = A_{1,2}e^{\lambda t}$ en houd bij de oplossing rekening met $I_1 < I_2 < I_3$).

e) Doe hetzelfde als bij d) voor een rotatie vrijwel precies rond richting 2.

f) Doe hetzelfde voor een rotatie vrijwel precies rond richting 1.

g) Bespreek de bij d), e), en f) gevonden antwoorden in termen van stabiele en instabiele rotaties.