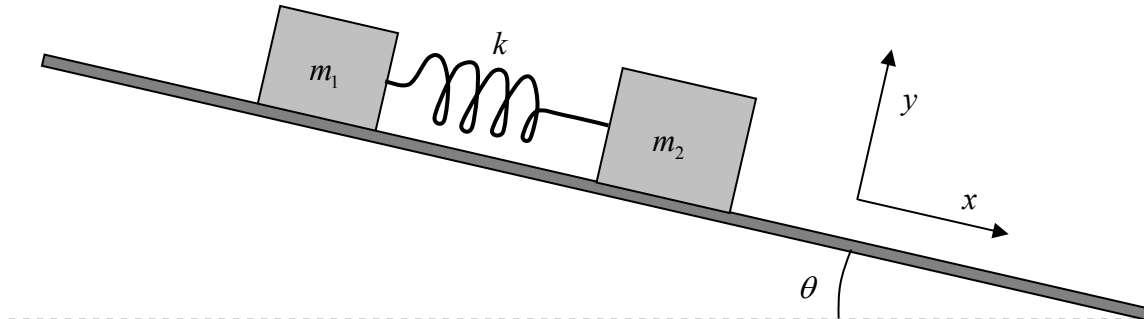


**Uitwerking tentamen Klassieke Mechanica II**  
**Maandag 21 oktober 2002**

OPGAVE 1: Hellend vlak



- a) Aangezien de beweging geheel plaatsvindt in het vlak van de tekening, hebben we per blok 2 coördinaten nodig om zijn positie vast te leggen. Voor de twee blokken zijn dus  $n=4$  coördinaten nodig. Het aantal vrijheidsgraden bedraagt  $m=2$ , omdat beide blokken gedwongen zijn om parallel aan het vlak te bewegen, zodat er per blok nog maar één vrijheidsgraad overblijft.
- b) Het ligt voor de hand om een van de assen van het coördinatenstelsel parallel te kiezen aan het vlak en de tweede as daar loodrecht op. Verder kiezen we de oorsprong voor elk van de blokken zodanig dat de veer precies haar evenwichtslengte  $l$  aanneemt als de blokken zich elk in hun eigen oorsprong bevinden. De Lagrangiaan van dit systeem is dan t.o.v. die uitgangskonfiguratie:

$$L = K - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + m_1gx_1 \sin \theta + m_2gx_2 \sin \theta - m_1gy_1 \cos \theta - m_2gy_2 \cos \theta - \frac{1}{2}k \left[ \sqrt{(x_1 - x_2 + l)^2 + (y_1 - y_2)^2} - l \right]^2$$

De vier Lagrangevergelijkingen zijn:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2 + l) \left[ 1 - \frac{l}{\sqrt{(x_1 - x_2 + l)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right] - m_1g \sin \theta = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2 + l) \left[ 1 - \frac{l}{\sqrt{(x_1 - x_2 + l)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right] - m_2g \sin \theta = 0 \\ m_1\ddot{y}_1 + k(y_1 - y_2) \left[ 1 - \frac{l}{\sqrt{(x_1 - x_2 + l)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right] + m_1g \cos \theta = Q'_{y1} \\ m_2\ddot{y}_2 - k(y_1 - y_2) \left[ 1 - \frac{l}{\sqrt{(x_1 - x_2 + l)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right] + m_2g \cos \theta = Q'_{y2} \end{cases}$$

Hierbij staan in de laatste twee vergelijkingen de krachten  $Q'_{y1}$  en  $Q'_{y2}$  die door het vlak op de twee blokken in de  $y$ -richting worden uitgeoefend.

- c) Op het systeem werken twee beperkingen, namelijk dat de twee  $y$ -coördinaten niet veranderen:  $y_1 = 0$  en  $y_2 = 0$ . In de laatste twee Lagrangevergelijkingen van b) worden hierdoor de versnellingen in de  $y$ -richting gelijk aan nul. Dit legt meteen de met de beperkingen geassocieerde krachten vast:

$$Q'_{y_1} = m_1 g \cos \theta \quad \text{en} \quad Q'_{y_2} = m_2 g \cos \theta.$$

- d) De twee overgebleven Lagrangevergelijkingen nemen de vorm aan:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) - m_1 g \sin \theta = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) - m_2 g \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Als we deze vergelijkingen bij elkaar optellen, dan vallen de met de veer samenhangende termen weg en blijft er een vergelijking over voor de beweging van het massamiddelpunt van de twee blokken:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 - (m_1 + m_2) g \sin \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{u} = g \sin \theta \quad \text{met} \quad u \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

De oplossing hiervan is:  $u(t) = u(0) + \dot{u}(0)t + \frac{1}{2} g t^2 \sin \theta$ . Dit is een eenparig versnelde valbeweging van het massamiddelpunt  $u$  van de twee blokken.

De tweede lineaire combinatie krijgen we door de eerste twee Lagrangevergelijkingen van elkaar af te trekken, met gewichtsfactoren  $m_2$  voor de eerste vergelijking en  $m_1$  voor de tweede. Het resultaat is:

$$m_1 m_2 (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k(m_2 + m_1)(x_1 - x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{v} + \frac{k}{m_{\text{eff}}} v = 0$$

$$\text{met} \quad v \equiv x_1 - x_2 \quad \text{en} \quad \text{effectieve massa} \quad m_{\text{eff}} \equiv \frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1}.$$

De oplossing hiervan is een harmonische oscillatie van de twee blokken t.o.v. elkaar:

$$v(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad \text{met} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_{\text{eff}}}}.$$

- e) Neem als uitgangspositie van blok 1:  $x_1 = 0$ . De beginpositie van blok 2 is uitgeweken (uitgerekte veer), volgens  $kx_2 = m_2 g \sin \theta$ . Omgerekend in  $u$  en  $v$  betekent dit,  $u(0) = \frac{m_2^2 g \sin \theta}{k(m_1 + m_2)}$  en  $v(0) = -\frac{m_2 g \sin \theta}{k}$ , terwijl  $\dot{u}(0) = 0$  en  $\dot{v}(0) = 0$

(start vanuit stilstand). Hieruit vinden we  $\alpha = 0$  en  $A = v(0) = -\frac{m_2 g \sin \theta}{k}$ . De

bewegingen van de afzonderlijke blokken vinden we uit:

$$x_1 = u + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \quad \text{en} \quad x_2 = u - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v. \quad \text{Invullen levert:}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} g t^2 \sin \theta + \frac{m_2^2 g \sin \theta}{k(m_1 + m_2)} (1 - \cos \omega t) \quad \text{en}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} g t^2 \sin \theta + \frac{m_2^2 g \sin \theta}{k(m_1 + m_2)} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \omega t \right).$$

- f) De wrijvingskrachten komen in de eerste twee Lagrangevergelijkingen voor als extra krachten  $Q'_{x_1} = -\mu m_1 g \cos \theta \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|}$  en  $Q'_{x_2} = -\mu m_2 g \cos \theta \frac{\dot{x}_2}{|\dot{x}_2|}$ . De breuk in elk van de twee vergelijkingen geeft aan dat de wrijvingskracht voor elk blok altijd tegen de bewegingsrichting van dat blok in staat. Vanwege de wrijving neemt de versnelling van het massamiddelpunt af van  $g \sin \theta$  naar  $g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$ . Als de oscillatieamplitudes van beide blokken zo klein zijn t.o.v. hun gezamenlijke snelheid (massamiddelpunt) dat er geen omkeringen (meer) optreden van de richting van de snelheden, dan zal de wrijving verder niet leiden tot een verlaging van de oscillatie-amplitude. Zolang de bewegingsrichting van (een van) de blokken nog omkeert, neemt de wrijving energie weg uit de oscillatie en neemt de oscillatie-amplitude af.

### OPGAVE 2: Foucault's Peugeot

- a) Op de auto werken
- (i) de zwaartekrachtsversnelling  $g$ ,
  - (ii) de centrifugaalversnelling  $\omega^2 R \cos \theta$ , waarbij  $\omega$  de rotatiesnelheid (hoek-snelheid) van de aarde is,  $R$  de aardstraal en  $\theta = 52^\circ$ ,
  - (iii) de Coriolisversnelling  $2\omega v \sin \theta$ ,
  - (iv) en strikt genomen ook de centrifugaalversnelling  $v^2/R$  t.g.v. het rijden op een ronde aarde.
- b) De grootte van de Coriolisversnelling bedraagt  $a_{Cor} = 2\omega v \sin \theta$ . Deze versnelling is voor de naar het noorden rijdende auto gericht naar het oosten. In het locale coördinatenstelsel, met de  $x$ -as naar het oosten, de  $y$ -as naar het noorden en de  $z$ -as loodrecht op het aardoppervlak (omhoog), is er dan uitsluitend een  $x$ -component.
- c) We splitsen nu de snelheid van de auto in een component  $v \cos \phi$  in de positieve  $y$ -richting en een component  $v \sin \phi$  in de positieve  $x$ -richting. De  $y$ -snelheid behandelen we analoog aan de oplossing bij b), en daarvoor vinden we een bijdrage aan de Coriolisversnelling van  $a_{Cor}^x = 2\omega v \sin \theta \cos \phi$ . De  $x$ -snelheid levert een Coriolisversnelling op ter grootte van  $2\omega v \sin \phi$ , die van de aardas is weg-gericht. Daarvan staat een component  $a_{Cor}^z = 2\omega v \cos \theta \sin \phi$  naar boven toe gericht en een component  $a_{Cor}^y = -2\omega v \sin \theta \sin \phi$  in de  $y$ -richting.
- d) We gebruiken de bij c) bepaalde  $x$ - en  $y$ -componenten van de Coriolisversnelling om de grootte van de totale horizontale Coriolisversnelling te bepalen:
- $$\sqrt{(a_{Cor}^x)^2 + (a_{Cor}^y)^2} = 2\omega v \sin \theta.$$
- Deze grootte is inderdaad onafhankelijk van de rijrichting  $\phi$ . De eenheidsvector in de richting van de snelheid is  $(\sin \phi, \cos \phi)$ . De richtingsvector van de horizontale component van de Coriolisversnelling bedraagt  $(\cos \phi, -\sin \phi)$ . Deze twee richtingen staan loodrecht op elkaar, en wel zo dat de Coriolisversnelling t.o.v. de snelheidsrichting altijd "naar rechts" wijst.
- e) Omdat de grootte van de horizontale versnelling altijd constant is en de richting altijd loodrecht staat op de bewegingsrichting, volgt de auto een cirkel. Van boven gezien is dit een cirkel met de wijzers van de klok mee. De straal van de cirkel  $R$

kunnen we bepalen door de Coriolisversnelling gelijk te stellen aan de voor een cirkel met straal  $R$  benodigde centripetaalversnelling:

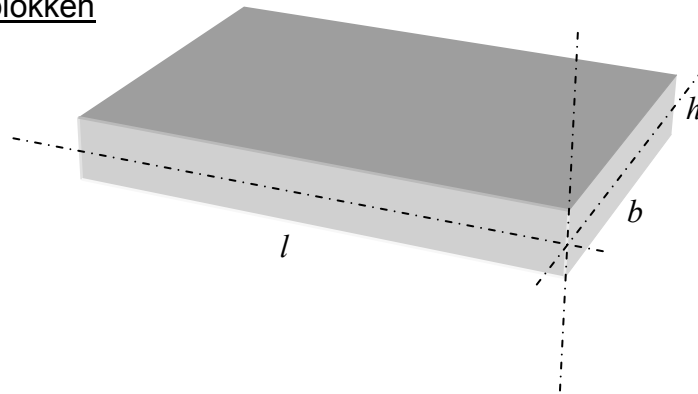
$$\frac{v^2}{R} = 2\omega v \sin \theta \Leftrightarrow R = \frac{v}{2\omega \sin \theta}$$

Voor een rondgang is een tijd nodig van:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{2\omega \sin \theta} = \frac{1 \text{ dag}}{2 \sin \theta}. \text{ Deze tijd is onafhankelijk van de snelheid van de auto.}$$

- f) In de buurt van de noordpool geldt  $\sin \theta \approx 1$ , zodat  $T \approx \frac{1}{2}$  dag. Uiteraard klopt dit niet met de verwachting van precies 1 dag. Dit is het gevolg van het feit dat we de centrifugaalversnelling t.g.v. de aardrotatie hebben verwaarloosd. Als we deze correct in rekening brengen, dan bedraagt de omlooptijd bij de noordpool wel degelijk 1 dag. Onze auto rijdt dan precies tegen de aardrotatie in en blijft t.o.v. een niet met de aarde meedraaiende waarnemer stilstaan.

### OPGAVE 3: Tuimelende blokken



- a) Het traagheidsmoment  $I_{zz}$  t.ov. de as loodrecht op het  $lb$ -vlak laat zich op meerdere manieren berekenen; bijvoorbeeld door eerst het traagheidsmoment uit te rekenen t.o.v. een parallelle as door het midden van het blok en daarna het parallelle-as theorema toe te passen. Hier laten we de directe integratie zien:

$$I_{zz} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^l dy \int_0^b dx (x^2 + y^2) = \frac{1}{3} \rho h b l (b^2 + l^2) = \frac{1}{3} M (b^2 + l^2), \text{ waarbij } M \text{ de totale}$$

massa voorstelt van het blok. De drie gevraagde traagheidsproducten zijn:

$$I_{xy} = -\rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^l dy \int_0^b dx xy = -\frac{1}{4} \rho h b^2 l^2 = -\frac{1}{4} M b l$$

$$I_{xz} = -\rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^l dy \int_0^b dx xz = 0$$

$$I_{yz} = -\rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^l dy \int_0^b dx yz = 0$$

- b) De traagheidstensor, waarvan we bij a) de meeste componenten hebben uitgerekend, heeft dus behalve de drie diagonaalelementen slechts twee niet-diagonaalelementen die ongelijk zijn aan nul, namelijk  $I_{xy}$  en  $I_{yx}$ , en ziet er daarom als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Als we deze tensor laten werken op de drie rotaties  $\omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , dan

leidt dat alleen in het derde geval tot een impulsmoment in de richting van de rotatievector. Dat is dus de enige as waarbij voor rotatie geen krachtmoment nodig is. Overigens is er, vanwege het feit dat de draaias niet door het massamiddelpunt loopt, wel voortdurend een centripetaalkracht nodig voor de derde rotatie (ook voor de twee andere rotaties, natuurlijk).

c) De Eulervergelijkingen:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = 0 \end{cases}$$

d) Zoals gegeven, gaan we uit van een rotatie vrijwel precies rond richting 3, zodat  $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$ . We nemen aan dat  $\omega_3$  (vrijwel) constant is, en gebruiken deze informatie om de Eulervergelijkingen voor  $\dot{\omega}_1$  en  $\dot{\omega}_2$  te vereenvoudigen:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \left( \frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_3 \right) \omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 + \left( \frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_3 \right) \omega_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 + C_1 \omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - C_2 \omega_1 = 0 \end{cases}, \text{ met positieve constanten } C_1 \text{ en } C_2.$$

We substitueren nu de probeeroplossing  $\omega_{1,2}(t) = A_{1,2} e^{\lambda t}$  in beide vergelijkingen en delen de exponentiële functie weg uit het resultaat:

$$\begin{cases} \lambda A_1 + C_1 A_2 = 0 \\ \lambda A_2 - C_2 A_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda^2 = -C_1 C_2 \wedge \frac{A_2}{A_1} = -\frac{\lambda}{C_1} \Leftrightarrow \lambda = \pm i \sqrt{C_1 C_2} \wedge \frac{A_2}{A_1} = \mp i \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}.$$

Het resultaat wordt een periodieke oplossing voor zowel  $\omega_1$  als  $\omega_2$ , met een hoeksnelheid  $\sqrt{C_1 C_2}$ . Als we de oplossing compleet willen maken, dan moeten we de (complexe) amplitudes  $A_1^+$  en  $A_1^-$  voor de twee oplossingen van  $\lambda$  zo kiezen dat ze elkaars complex toegevoegde zijn. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we de fase zodanig kiezen dat op tijdstip  $t=0$  de component  $\omega_2$  gelijk is aan nul. Dan zijn de oplossingen:

$$\omega_1(t) = B \cos(\sqrt{C_1 C_2} t) \quad \text{en} \quad \omega_2(t) = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} B \sin(\sqrt{C_1 C_2} t).$$

We zien dat de grootte van de component loodrecht op  $\omega_3$  (in deze benadering) schommelt tussen  $B$  en

$$\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} B, \text{ maar verder geen groei of afname vertoont.}$$

e) Voor een rotatie vrijwel precies rond richting 2 schrijven we de Eulervergelijkingen op dezelfde, vereenvoudigde wijze als bij d). Nu komen we echter uit op de vorm:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + C_1 \omega_3 = 0 \\ \dot{\omega}_3 + C_3 \omega_1 = 0 \end{cases}, \text{ met positieve constanten } C_1 \text{ (let op: andere } C_1 \text{ dan bij d)) en } C_3.$$

Als we nu dezelfde vorm  $\omega_{1,3}(t) = A_{1,3} e^{\lambda t}$  voor onze probeerfunctie invullen, vinden we:

$$\begin{cases} \lambda A_1 + C_1 A_3 = 0 \\ \lambda A_3 + C_3 A_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda^2 = C_1 C_3 \wedge \frac{A_3}{A_1} = -\frac{\lambda}{C_1} \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{C_1 C_3} \wedge \frac{A_3}{A_1} = \mp \sqrt{\frac{C_3}{C_1}}$$

Het resultaat is een combinatie van een exponentieel afnemende en een exponentieel toenemende oplossing:

$$\omega_1(t) = A_1^- e^{-\sqrt{C_1 C_3} t} + A_1^+ e^{\sqrt{C_1 C_3} t} \text{ en } \omega_3(t) = A_3^- e^{-\sqrt{C_1 C_3} t} + A_3^+ e^{\sqrt{C_1 C_3} t}.$$

- f) Als we dezelfde exercitie uitvoeren voor een rotatie vrijwel precies rond richting 1, dan vinden we, net als bij d) een periodieke oplossing met een constante grootte van de afwijking in het 2-3 vlak.
- g) Bij rotaties rondom assen 1 en 3, dus de assen met het laagste of het hoogste traagheidsmoment, blijft de grootte van de afwijking van de rotatievector van de hoofdas constant. Dit kunnen we beschouwen als stabiele rotaties, vergelijkbaar met het geval van een symmetrische tol. Bij rotatie rondom as 2, daarentegen, vinden we dat de afwijking als functie van de tijd exponentieel groeit. Deze rotatie is daarom te beschouwen als instabiel.