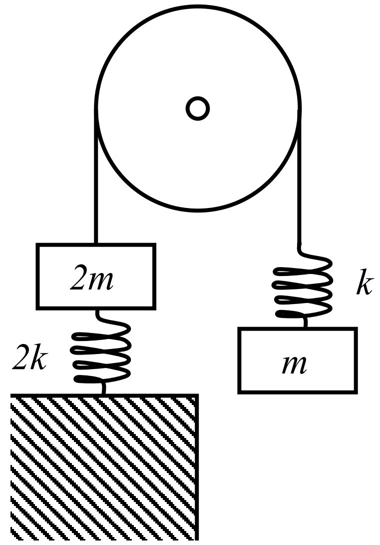
Uitwerking hertentamen Klassieke Mechanica II
Woensdag 4 december 2002

OPGAVE 1: massa's en veren



a) Het getekende systeem heeft twee vrijheidsgraden, de hoogte van het linkerblok en de hoogte van het rechterblok.

b) Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 = m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_2^2$; en potentiële energie: $V = \frac{1}{2}k_1 z_1^2 + \frac{1}{2}k_2\left(z_1 + z_2\right)^2 = kz_1^2 + \frac{1}{2}k\left(z_1 + z_2\right)^2$. Let op: in de uitdrukking voor de potentiële energie komen de zwaartekrachtsenergieën niet voor. Dit is het resultaat van de keuze om de twee coördinaten nul te kiezen in de rustposities van de twee blokken. Uit bovenstaande energieën volgt de Lagrangiaan: $L = m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_2^2 - kz_1^2 - \frac{1}{2}k\left(z_1 + z_2\right)^2$.

c) De twee Lagrangevergelijkingen luiden: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_1} = 0$ en $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_2} = 0$.
Hieruit volgt: $2m\ddot{z}_1 + 3kz_1 + kz_2 = 0$ en $m\ddot{z}_2 + kz_1 + kz_2 = 0$.

d) De normaalcoördinaten van dit systeem zijn: $z_1 - z_2$ en $2z_1 + z_2$. Om dit te zien kijken we naar de volgende twee lineaire combinaties van de twee Lagrange vergelijkingen:
$\left(2m\ddot{z}_1 + 3kz_1 + kz_2\right) - 2\left(m\ddot{z}_2 + kz_1 + kz_2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2m\left(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2\right) + k\left(z_1 - z_2\right) = 0$ en
$\left(2m\ddot{z}_1 + 3kz_1 + kz_2\right) + \left(m\ddot{z}_2 + kz_1 + kz_2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\left(2\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2\right) + 2k\left(2z_1 + z_2\right) = 0$

e) Beide (gecombineerde) Lagrangevergelijkingen bij d) hebben een harmonische oscillatie als oplossing. We voeren in: $u \equiv z_1 - z_2$ en $v \equiv 2z_1 + z_2$. De oplossingen: $u = U\cos\left(\omega_u t + \alpha_u\right)$, met $\omega_u = \sqrt{k/2m}$, en $v = V\cos\left(\omega_v t + \alpha_v\right)$, met $\omega_v = \sqrt{2k/m} = 2\omega_u$. De beweging van de afzonderlijke blokken vinden we met de combinaties: $z_1 = \frac{1}{3}\left(u + v\right)$ en $z_2 = \frac{1}{3}\left(v - 2u\right)$. De vier consanten U, V, α_u en α_v hangen af van de begincondities.

f) Voor de gevraagde, specifieke oplossing is het het eenvoudigst om naar de normaalcoördinaten terug te gaan. Omdat zowel z_1 als z_2 op $t = 0$ nul zijn, zijn ook $u(0)$ en $v(0)$ nul. Verder geldt voor de beginsnelheden $\dot{z}_1(0) = 0$ en $\dot{z}_2(0) = v_0$, zodat $\dot{u}(0) = -v_0$ en $\dot{v}(0) = v_0$. Hiermee vinden we:

$$\left[\begin{array}{l} u(t) = -\frac{v_0}{\omega_u}\sin\left(\omega_u t\right) \\ v(t) = \frac{v_0}{2\omega_u}\sin\left(2\omega_u t\right) \end{array}\right.$$

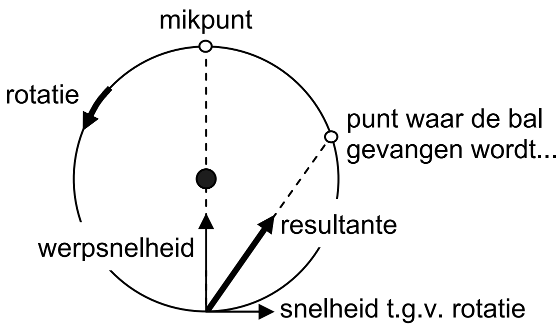
, waaruit volgt dat

$$\left[\begin{array}{l} z_1(t) = \frac{v_0}{3\omega_u}\left[-\sin\left(\omega_u t\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\omega_u t\right)\right] \\ z_2(t) = \frac{v_0}{3\omega_u}\left[2\sin\left(\omega_u t\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\omega_u t\right)\right] \end{array}\right. .$$

OPGAVE 2: Op de draaischijf

a) Je ondervindt de naar beneden gerichte gravitatieversnelling ter grootte g en binnen het roterende systeem van de draaischijf ondervindt je tevens de naar buiten gerichte centrifugaalversnelling ter grootte $a_c = \omega^2 R$. Voor de volledigheid: omdat je op de schijf (stil)staat, weet je dat je even grote, tegengesteld gerichte reactieversnellingen ondervindt, namelijk een opwaartse versnelling van de draaischijf te grootte g en een naar de draaias gerichte wrijvingsversnelling ter grootte $\omega^2 R$.

b) De geworpen bal beweegt binnen het roterende systeem. Daardoor ondervindt de bal binnen dit systeem naast de twee genoemde versnellingen ook de Coriolisversnelling. Deze is, vanuit de werprichting van de bal gezien, naar rechts gericht. Daardoor zal de baan van de bal de baan van de werper kruisen op een punt rechts van, dus vóór het punt waarop de werper had gemikt. Een andere manier om dit te beschrijven is dat de werper weliswaar op het midden mikt, maar er daarbij geen rekening mee houdt dat hij t.o.v. de draaias, gezien binnen een met die draaias verbonden inertiaalstelsel, niet stilstaat. De door de rotatie van de werper veroorzaakte snelheid zorgt ervoor dat de bal een beginsnelheid krijgt die niet meer naar de draaias is gericht (zie tekening). De intertiaalwaarnemer ziet de bal langs een schuine, rechte lijn oversteken naar een punt rechts van het ‘mikpunt’. (Een tweede reden voor een afwijking naar rechts wordt onder punt f) besproken.)



c) Naast de bij a) genoemde versnellingen ondervindt je nu de Coriolisversnelling ter grootte $2\omega v$. Deze is naar rechts gericht (t.o.v. de snelheidsvector).

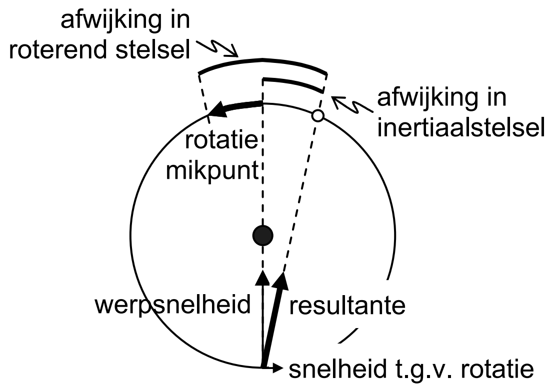
d) De radiële potentiële energie vinden we door de radiële versnelling te integreren: $V_{rad}\left(R\right) - V_{rad}\left(R_0\right) = -m\int_{R_0}^{R} \omega^2 r dr = -\frac{1}{2} m\omega^2 \left(R^2 - R_0^2\right)$. Het heeft hier duidelijk geen zin om het referentiepunt R_0 in het oneindige te leggen. De voor de hand liggende keuze is $R_0 = 0$, zodat $V_{rad}\left(R\right) = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2$.

e) De radiële beginsnelheid die je op basis van het antwoord bij c) nodig hebt om het midden te bereiken vind je met $\frac{1}{2} m v_{rad}^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2$; daaruit volgt $v_{rad} = \omega R$. Het gaat hier weliswaar om fictieve krachten maar wel degelijk om èchte kinetische energie. Voor een inertiaalwaarnemer heeft de massa op afstand R van de draaias een snelheid ωR. Om vanaf die afstand, nog steeds meedraaiend met de draaischijf, het centrum te bereiken moet de snelheid tot nul gereduceerd worden. Deze snelheidsverandering van $\left|\Delta v\right| = \omega R$ t.o.v. de uitgangssituatie wordt binnen het roterende systeem gevoeld als het investeren van kinetische energie in een verhoging van de (radiële) potentiële energie met een bedrag $\frac{1}{2} m\omega^2 R^2$.

f) *Binnen het roterende stelsel:* In de gegeven benadering, $v_0 \gg \omega R$, is de Coriolisversnelling onderweg constant in grootte en richting, namelijk $a_c = 2\omega v_0$

naar “rechts”. De tijd die nodig is voor de halve oversteek bedraagt R/v_0 . In die tijd wordt vanwege de Coriolisversnelling een afwijking naar rechts opgebouwd van $\frac{1}{2}a_c t^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\omega v_0 \cdot (R/v_0)^2 = \omega R^2/v_0$.

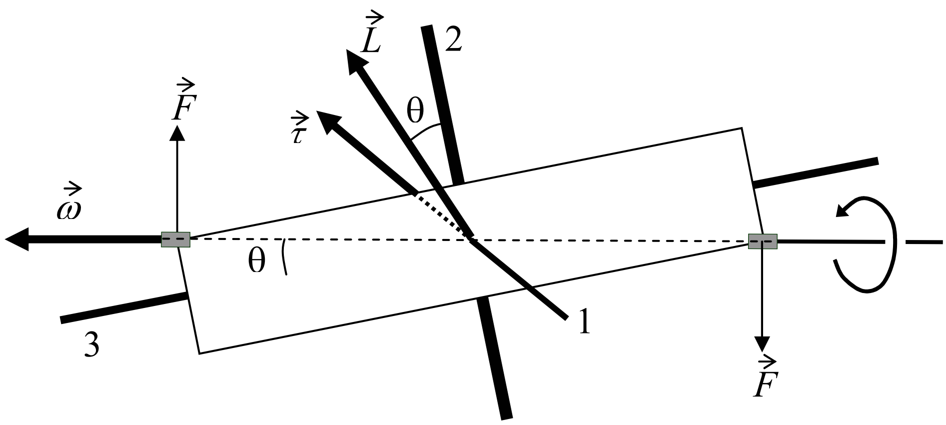
Binnen een inertiaalstelsel: De beginsnelheid van de bal heeft twee componenten, namelijk v_0 naar het centrum en ωR naar rechts. In de tijd R/v_0 die de bal nodig heeft om het centrum te bereiken, beweegt deze een kleine afstand $\omega R t = \omega R^2/v_0$ naar rechts.



Het feit dat de uitkomsten gelijk zijn, is in zekere zin *toeval*. De reden is dat waarnemers in beide stelsels het eens zijn over de positie van de draaias, zodat ze de bal dat punt op een precies even grote afstand zien passeren. Als we de afstand hadden uitgerekend waarop de bal een andere positie mist, bijvoorbeeld het punt aan de ‘overkant’, hadden we verschillende uitkomsten gekregen, namelijk $\frac{1}{2}a_c t^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\omega v_0 \cdot (2R/v_0)^2 = 4\omega R^2/v_0$ binnen het roterende stelsel en $\omega R t = 2\omega R^2/v_0$ binnen het inertiaalstelsel. Het verschil tussen de twee uitkomsten berust op het verschil in de waarneming. Binnen het inertiaalstelsel wordt de afstand gemeten t.o.v. het punt dat zich op het moment van de worp tegenover de werper bevindt, terwijl de afstand binnen het draaiende stelsel gemeten wordt t.o.v. de met de schijf meegedraaide overkant (zie tekening). In de tijd $2R/v_0$ draait een punt op afstand R van het midden over een afstand $\omega R t = 2\omega R^2/v_0$, waardoor binnen dit stelsel de gemeten afwijking de som bedraagt van deze draaiing en de binnen het inertiaalstelsel waargenomen baanafwijking, dus $2\omega R^2/v_0 + 2\omega R^2/v_0 = 4\omega R^2/v_0$.

OPGAVE 3: Kantelende plank

a) Zie figuur:



Traagheidsmomenten:
$I_1 = \frac{1}{12} M \left(l^2 + b^2\right)$

$I_2 = \frac{1}{12} M l^2$

$I_3 = \frac{1}{12} M b^2$

Hierbij zijn l, b en M de lengte, breedte en massa van de plaat.

b) Het impulsmoment vinden we uit:
$\vec{L} = I_1\omega_1\hat{1} + I_2\omega_2\hat{2} + I_3\omega_3\hat{3}$, waarbij $\hat{1}$, $\hat{2}$ en $\hat{3}$ de eenheidsvectoren zijn langs de in de figuur aangegeven hoofdrichtingen 1, 2 en 3. De drie componenten van de rotatievector zijn:

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \omega \sin\theta = \omega \frac{b}{\sqrt{l^2 + b^2}}$$

$$\omega_3 = \omega \cos\theta = \omega \frac{l}{\sqrt{l^2 + b^2}}$$

Dus $\vec{L} = \frac{1}{12} M\omega \frac{bl}{\sqrt{l^2 + b^2}} \left(l\hat{2} + b\hat{3}\right)$.

Merk op dat de hoek die de impulsmomentvector maakt met de 2-as precies gelijk is aan de hoek die de rotatie-as (diagonaal) maakt met de 3-as (zie figuur).

c) Krachtmoment:

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = \vec{\omega} \times \vec{L} = \frac{\omega}{\sqrt{l^2 + b^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ l \end{pmatrix} \times \frac{1}{12} M\omega \frac{bl}{\sqrt{l^2 + b^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{12} M\omega^2 \frac{bl}{l^2 + b^2} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ l \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} M\omega^2 \frac{bl\left(b^2 - l^2\right)}{l^2 + b^2} \hat{1}$$

Dezelfde oplossing bereik je ook snel via de Euler-vergelijkingen. Omdat $\omega_1 = 0$, ‘overleeft’ alleen de eerste component van $\vec{\tau}$: $\tau_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$, met bovenstaand resultaat.

(Zie figuur. Let op: omdat $b < l$ staat $\vec{\tau}$ in de negatieve 1-richting).

d) De krachten in de lagers die voor het krachtmoment verantwoordelijk zijn, staan in de figuur aangegeven. De grootte van beide krachten bedraagt:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{\left|\vec{\tau}\right|}{\sqrt{l^2 + b^2}} = \frac{1}{12} M\omega^2 \frac{bl\left(l^2 - b^2\right)}{\left(l^2 + b^2\right)^{3/2}} \approx 2.4 \text{ N}.$$

e) Als de plank plotseling losschiet, en daardoor het krachtmoment wegvalt, dan blijft vanaf dat moment het impulsmoment behouden. Omdat de impulsmomentsvector $\vec{L}$ niet langs een van de drie hoofdassen ligt van de plank, kan de resulterende beweging niet worden beschreven als rotatie rond een hoofdas. De beweging kan worden beschreven als een rotatie rond een hoofdas gecombineerd met een precessie van de lichaams-as en rotatie-as rond $\vec{L}$.