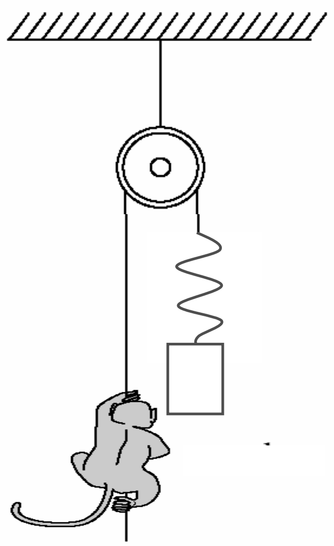
Tentamen Klassieke Mechanica II
Woensdag 22 oktober 2003
Duur: 3 uur

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam**, **studierichting**, en evt. **collegekaartnummer**! (TIP: lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag)

Uitslag: over ca. 2 weken bij studentenadministratie en op de KM2-webpagina. Als je bezwaar hebt tegen vermelding van je uitslag op de webpagina, geef dit dan duidelijk aan op het eerste blad.

OPGAVE 1: *apekool*

Een aap hangt aan een touw dat over een katrol loopt (ideaal touw: weegt niets; ideale katrol: géén wrijving en géén traagheidsmoment). Aan het andere uiteinde van het touw hangt een massaloze veer met veerconstante k, en daaraan hangt een contragewicht dat precies even zwaar is als de aap. Aanvankelijk hangen aap en contragewicht stil. Op tijdstip $t = 0$ zet de aap zich plotseling tegen de grond af, met opwaartse snelheid v_0.

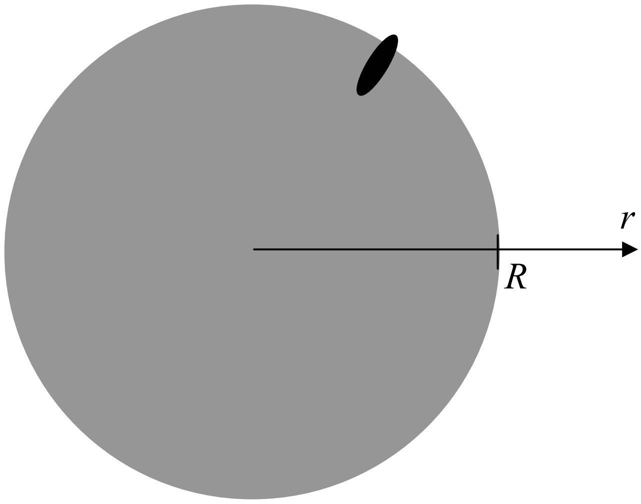


a) Hoeveel vrijheidsgraden heeft dit systeem; m.a.w. hoeveel onafhankelijke (gegeneraliseerde) coördinaten kan je kiezen?
b) Bedenk twee verschillende combinaties van gegeneraliseerde coördinaten waarmee je dit systeem kan beschrijven.
c) Schrijf de Lagrangiaan op, en druk deze uit in de twee bij b) bedachte combinaties van gegeneraliseerde coördinaten (twee antwoorden dus).
d) Kies een van de twee versies van de Lagrangiaan uit c) en stel de daarbij behorende Lagrange-vergelijkingen op.
e) Los de Lagrange-vergelijkingen van d) op. Houd hierbij rekening met de begincondities bij $t = 0$.
f) Beschrijf in woorden wat de oplossing betekent; welke beweging voeren aap en contragewicht uit?

Nu halveren we de massa van het contragewicht. De aap blijft even zwaar.

g) Beschrijf eerst in woorden wat voor beweging(en) je verwacht voor de aap en het contragewicht.
h) Stel de Lagrange-vergelijkingen op voor deze situatie.
i) Los de Lagrange-vergelijkingen van h) op. (TIP: schrijf de Lagrangevergelijkingen om in de gegeneraliseerde coördinaten $q_1 \equiv 2h_1 - h_2$ en $q_2 \equiv h_1 + h_2$, waarbij h_1 en h_2 de hoogten van de aap en het contragewicht zijn)

OPGAVE 2: *kosmische duik*



Beschouw een ‘kosmische vloeistof-druppel’ met dichtheid

$\rho(r) = \rho$ voor $r < R$

$\rho(r) = 0$ voor $r \geq R$

In deze opgave bekijken we de bewegingen van een ruimtevaartuig (duikboot) met massa m en volume V onder invloed van de gravitatie-kracht van de ‘druppel’. Voor het vaartuig geldt dat $\frac{m}{V} > \rho$.

a) Bereken de kracht op het vaartuig als functie van de afstand tot het middelpunt, zowel voor afstanden binnen als buiten de straal van de ‘druppel’. Maak een grafiek van het gevonden krachtverloop. (Tip: let op dat je *alle* door de vloeistof uitgeoefende krachten in rekening brengt…)
b) Reken de potentiële energie uit als functie van de afstand tot het middelpunt. Leg het nulpunt voor de potentiële energie op $r = \infty$. Maak opnieuw een grafiek.

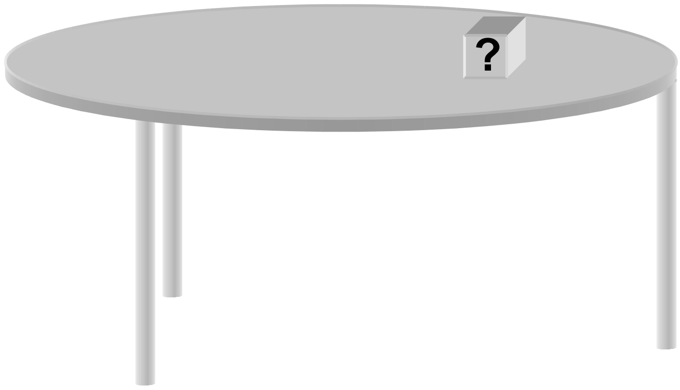
Vanaf de rand van de ‘druppel’, op $r = R$, laten we nu het vaartuig los, zonder beginsnelheid.

c) Wat voor beweging zal het vaartuig uitvoeren? Komt het ooit (eventueel momentaan) tot stilstand? Zoja, waar?
d) Stel aan de hand van het antwoord bij a) de bewegingsvergelijking op, en los deze op. Klopt het antwoord met je verwachting bij c)?
e) In de radiële richting heeft het vaartuig een lengte L. Als het vaartuig zich volledig binnen de straal R bevindt (geheel aan één kant van het centrum) werken er dan getijdekrachten (zwaartekrachtsvariaties over de afmeting van het vaartuig)? Zoja, hoe hangen deze dan af van de afstand r tot het centrum? (beschouw bijvoorbeeld de eventuele getijdekracht tussen de boven- en onderhelften van het vaartuig)
f) Kan het vaartuig door de krachten bij e) uit elkaar worden getrokken? Beredeneer je antwoord.
g) Als het vaartuig zich volledig buiten de ‘druppel’ bevindt, dus bij $r > R$, kan het dan door getijdekrachten uit elkaar worden getrokken?

OPGAVE 3: *omvallende tafels*

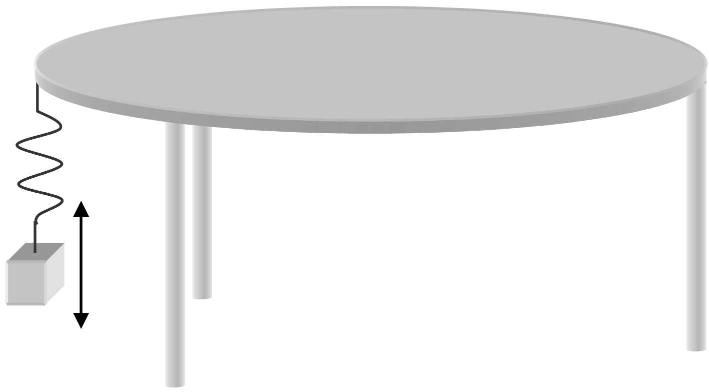
We beschouwen een ronde tafel, met een blad van 15 kg (uniform verdeeld) en met drie, precies langs de omtrek op regelmatige afstanden geplaatste, dunne, massaloze poten. De diameter van het tafelblad bedraagt 80 cm.

a) Op het tafelblad plaatsen we een extra massa van 12 kg. De drie poten blijken respectievelijk 5, 9 en 13 kg aan gewicht te dragen. Waar hebben we de extra massa precies neergezet?

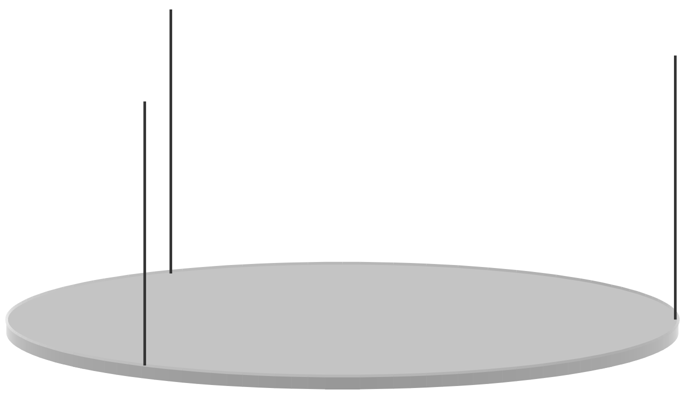


Nu wordt dezelfde extra massa via een (ideale) veer, met veerconstante $k = 300\ \mathrm{N/m}$, aan de tafelrand bevestigd, op een positie precies tegenover een van de poten (zie tekening).

b) Wat is de grootste amplitude waarmee dit massa-veer systeem verticaal kan trillen terwijl de drie poten allen voortdurend contact houden met de vloer?



Beschouw hetzelfde ronde tafelblad, maar nu opgehangen aan drie kabels, opnieuw aan de tafelrand op regelmatige afstanden van elkaar.



c) Bereken het traagheidsmoment ten opzichte van een horizontale as door het midden van de tafel, evenals het traagheidsmoment ten opzichte van de as door twee van de drie ophangpunten.

d) We snijden op tijdstip $t = 0$ één van de drie kabels door. Hoe groot is, direct na het doorsnijden, de spankracht in elk van de twee overgebleven kabels?

e) Met welke versnelling komt het massamiddelpunt van het tafelblad op dat moment ($t = 0$) naar beneden?

f) Welke minimale en maximale versnellingen treden op dat moment elders in het tafelblad op? Als er een kopje dicht bij de doorgesneden kabel op het tafelblad had gestaan, wat was er dan met dat kopje gebeurd, direct na $t = 0$?