

Uitwerking tentamen Klassieke Mechanica II
Woensdag 22 oktober 2003

OPGAVE 1: apekool

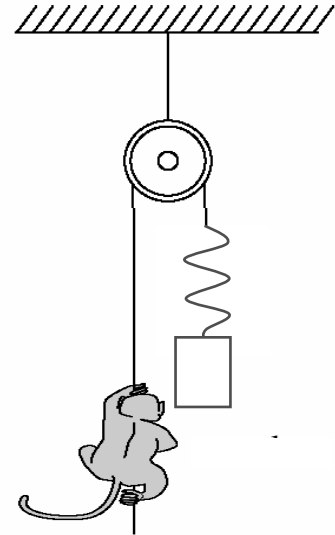
a) 2.

b) Hier zijn meer dan 2 combinaties mogelijk. Alle variaties waarbij telkens het volledige systeem door de coördinaten wordt beschreven, zijn goed gerekend. Hier komen 3 combinaties:

(i) De hoogte van de aap t.o.v. zijn uitgangspositie, h_1 , en de hoogte van het contragewicht t.o.v. zijn uitgangspositie h_2 .

(ii) De hoogte van de aap t.o.v. zijn uitgangspositie, h_1 , en de vervorming van de veer, h_1+h_2 .

(iii) De gezamenlijke verplaatsing van aap en contragewicht, gemeten langs het touw, h_1-h_2 , en de vervorming van de veer, h_1+h_2 .



c) (i) $L = K - V = \frac{1}{2}m(\dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2) - mg(h_1 + h_2) - \frac{1}{2}k(h_1 + h_2)^2$.

Wat hierin nog niet is meegerekend is dat de veer al uitgerekt is als de aap en het blok zich in hun uitgangsposities, $h_1 = 0$ en $h_2 = 0$, bevinden. Hiervoor worden we later nog 'gestraft' (zie onderdeel e)).

(ii) De nieuwe coördinaten zijn $q_1 = h_1$ en $q_2 = h_1 + h_2$. We kunnen h_1 en h_2 in deze nieuwe coördinaten uitdrukken: $h_1 = q_1$ en $h_2 = q_2 - q_1$. Invullen in de uitdrukking voor de Lagrangiaan bij (i) levert:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2) - mgq_2 - \frac{1}{2}kq_2^2 = \frac{1}{2}m(2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2) - mgq_2 - \frac{1}{2}kq_2^2$$

(iii) Nu zijn de nieuwe coördinaten $q_1 = h_1 - h_2$ en $q_2 = h_1 + h_2$. We kunnen h_1 en h_2 in deze nieuwe coördinaten uitdrukken: $h_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ en $h_2 = \frac{1}{2}(q_2 - q_1)$. Invullen in de uitdrukking voor de Lagrangiaan bij (i) levert:

$$L = \frac{1}{8}m((\dot{q}_2 + \dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2) - mgq_2 - \frac{1}{2}kq_2^2 = \frac{1}{4}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - mgq_2 - \frac{1}{2}kq_2^2$$

d) Elk van de drie formuleringen van het probleem bij c) kan zonder meer worden opgelost. De eenvoudigste uitdrukkingen verwachten we voor geval (iii), omdat daarvoor in de Lagrangiaan geen producten van verschillende coördinaten of hun tijdafgeleiden voorkomen. De bijbehorende Lagrange-vergelijkingen zijn:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\ddot{q}_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\ddot{q}_2 + mg + kq_2 = 0$$

e) De eerste vergelijking levert een eenparige beweging op: $q_1(t) = q_1(0) + v_1 t$. De tweede vergelijking herschrijven we als: $\ddot{s} + \frac{2k}{m}s = 0$, met $s = q_2 + \frac{mg}{k}$. De oplossing daarvan is een harmonische oscillatie:

$$s(t) = s(0) \cos(\omega t) + \dot{s}(0) \sin(\omega t), \text{ met } \omega = \sqrt{2k/m}.$$

De variabele $s(t)$ is de werkelijke indrukking van de veer t.o.v. de veerlengte met beide massa's in rust. In die stand is de veer dus al een stukje uitgerekt, namelijk met mg/k . Nu passen we de randcondities toe; op tijdstip $t=0$ zet de aap zich vanuit rust op positie $h_1(0) = 0$ in beweging met een opwaartse snelheid $\dot{h}_1(0) = v_0$. De veer heeft op dat moment nog zijn (uitgerekte) rustlengte, dus $s(0) = 0$ en het contragewicht staat nog stil op de uitgangspositie, zodat $\dot{h}_2(0) = 0$. Deze informatie combinerend vinden we de volgende uitdrukkingen voor $q_1(t)$, $q_2(t)$, $h_1(t)$ en $h_2(t)$.

$$q_1(t) = \frac{mg}{k} + v_0 t, \quad q_2(t) = -\frac{mg}{k} + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$h_1(t) = \frac{1}{2} v_0 \left(t + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right), \quad h_2(t) = -\frac{mg}{k} + \frac{1}{2} v_0 \left(\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) - t \right)$$

- f) Zowel de aap als het contragewicht voeren een combinatie uit van een eenparige beweging, de aap naar boven en het gewicht naar beneden, en een harmonische oscillatie.
- g) Combinatie van een eenparig versnelde beweging en een harmonische oscillatie.
- h) $L = \frac{1}{2} m (\dot{h}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{h}_2^2) - mg(h_1 + \frac{1}{2} h_2) - \frac{1}{2} k (h_1 + h_2)^2$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{h}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial h_1} = 0 \Rightarrow m \ddot{h}_1 + mg + k(h_1 + h_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{h}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial h_2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m \ddot{h}_2 + \frac{1}{2} mg + k(h_1 + h_2) = 0$$

- i) We nemen nu het verschil van de twee vergelijkingen en de som van $1 \times$ de eerste vgl. en $2 \times$ de tweede Lagrange-vergelijking uit h), en schrijven het resultaat meteen in de gegeven gegeneraliseerde coördinaten $q_1 = 2h_1 - h_2$ en $q_2 = h_1 + h_2$:

$$\frac{1}{2} m \ddot{q}_1 = -\frac{1}{2} mg \Rightarrow q_1(t) = q_1(0) + \dot{q}_1(0)t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$m \ddot{q}_2 = -2mg - 3k q_2 \Rightarrow q_2(t) + \frac{2mg}{3k} = \left[q_2(0) + \frac{2mg}{3k} \right] \cos(\omega t) + \dot{q}_2(0) \sin(\omega t)$$

met $\omega = \sqrt{3k/m}$.

Met de eerder gebruikte begincondities vinden we

$$q_1(t) = \frac{2mg}{3k} + 2v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad q_2(t) = -\frac{2mg}{3k} + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad \text{en}$$

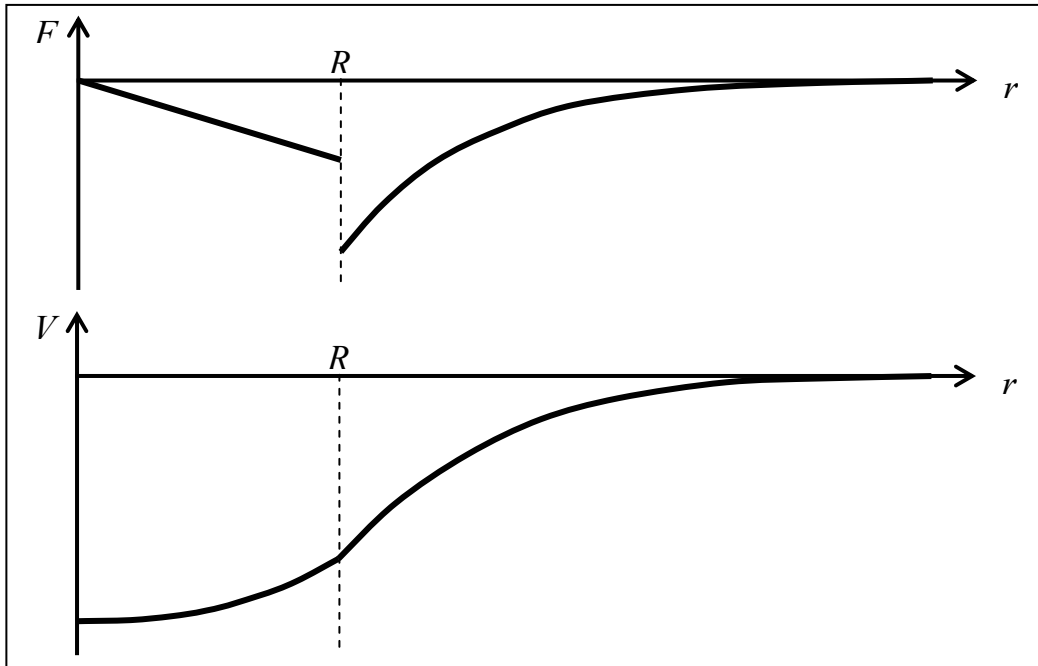
$$h_1(t) = \frac{1}{3} v_0 \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + 2t \right] - \frac{1}{6} g t^2, \quad h_2(t) = -\frac{2mg}{3k} + \frac{2}{3} v_0 \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) - t \right] + \frac{1}{6} g t^2$$

OPGAVE 2: kosmische duik

a) Let op: voor afstanden binnen de straal van de 'druppel' is hier rekening te houden met de door de vloeistof uitgeoefende 'opwaartse' kracht (Archimedes!).

$$r < R: F(r) = -\frac{4}{3}\pi\rho r^3 \frac{G(m-V\rho)}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho G(m-V\rho)r$$

$$r > R: F(r) = -\frac{4}{3}\pi\rho R^3 \frac{Gm}{r^2}$$



b) Voor de potentiële energie beginnen we te rekenen vanaf oneindige afstand:

$$r > R: V(r) = -\int_{\infty}^r F(r')dr' = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 Gm \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho Gm \frac{R^3}{r}$$

$$r = R: V(R) = -\frac{4}{3}\pi\rho GmR^2$$

$$r < R: V(r) = V(R) - \int_R^r F(r')dr' = \frac{4}{3}\pi\rho G \left[\frac{1}{2}(m-V\rho)(r^2 - R^2) - mR^2 \right]$$

c) Voor deze begincondities hebben we alleen te maken met de kracht voor $r < R$. We hebben bij a) gezien dat hier de aantrekkende kracht evenredig is met de afstand r tot het centrum. Het resultaat is dus een harmonische oscillatie. De omkeerpunten liggen bij $r=R$. Op deze punten is de snelheid telkens nul. Eventuele vloeistofwrijving (mocht worden verwaarloosd) zal uiteraard leiden tot een demping van de oscillatiebeweging.

d) $r(t) = R \cos(\omega t)$, met $\omega^2 = \frac{4}{3}\pi\rho G \left(1 - \frac{V\rho}{m} \right)$.

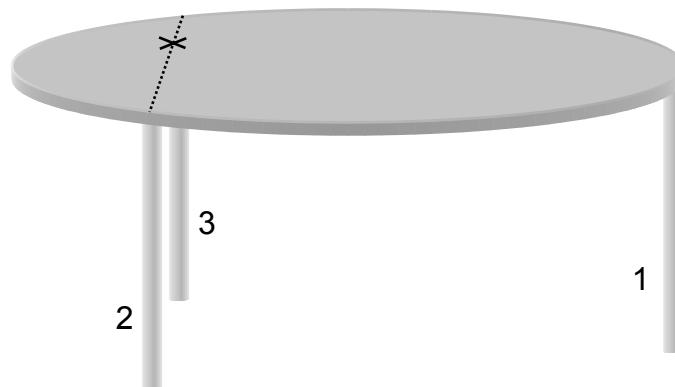
e) Omdat de zwaartekrachtsversnelling niet voor alle r dezelfde waarde heeft, zijn er inderdaad getijdekrachten. De versnelling varieert lineair met de afstand. Als gevolg daarvan is de afgeleide van de zwaartekrachtsversnelling naar r wel constant. Dus binnen de 'druppel' hangen de getijdekrachten *niet* af van r .

f) Door de bij e) besproken krachten kan het vaartuig niet uit elkaar worden getrokken. Omdat de aantrekkende kracht voor toenemende r in grootte alleen maar toeneemt, drukken de getijdekrachten binnen de 'druppel' het vaartuig juist samen, en trekken het dus niet uit elkaar.

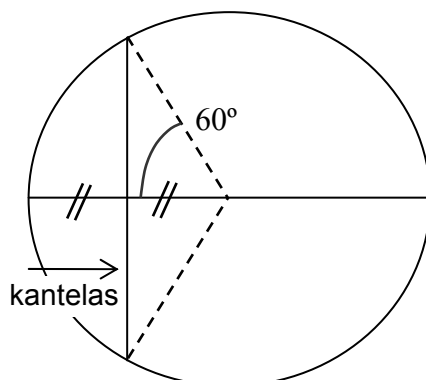
- g) Als het vaartuig zich volledig buiten de druppel bevindt, dan verandert de gradiënt in de zwaartekrachtsversnelling van teken (zie (a), en zie tekening). Als gevolg daarvan verandert de getijdekracht van teken, en wordt daarmee een *trekkracht*. De maximale sterkte van deze kracht wordt vlak boven de 'druppel' bereikt, bij $r = R$.

OPGAVE 3: omvallende tafels

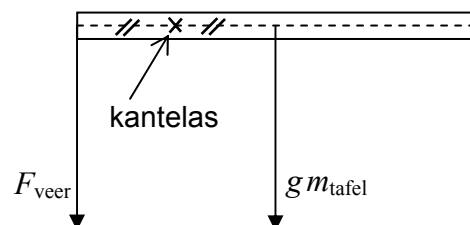
- a) De extra 'gewichten' op de drie poten (genummerd 1, 2 en 3) t.g.v. de extra massa bedragen respectievelijk 0, 4 en 8 kg. Het feit dat een van deze gewichtskrachten nul bedraagt, impliceert dat het krachtmoment van de extra gewichtskraft nul is t.o.v. de verbindingslijn tussen de steunpunten van de twee andere poten (zie figuur). De extra massa moet dus zelf op deze lijn staan. De verhouding van 1:2 tussen de extra krachten op de twee poten langs deze lijn geeft aan dat de afstanden tussen de extra massa en de twee poten zich verhouden als 2:1. Dus de massa staat op de verbindingslijn tussen poten 2 en 3, op $2/3$ van dat verbindingslijnstuk, gemeten vanaf poot 2.



- b) De nummering van de poten is zoals bij a). De maximale trekkracht die de veer mag uitoefenen wordt bereikt als het krachtmoment van die kracht t.o.v. de verbindingslijn tussen poten 2 en 3 in grootte precies gelijk is aan het krachtmoment van de zwaartekracht van het tafelblad t.o.v. diezelfde lijn.



bovenaanzicht



zijaanzicht

De poten zitten op regelmatige afstanden. De verbindingslijn (kantelas) loopt daardoor precies midden tussen het centrum van het tafelblad en het punt waar de veer hangt (zie tekening). De genoemde krachtmomenten zijn daardoor in grootte gelijk als de grootte van de veerkracht precies gelijk is aan de

zwaartekracht op de tafel: $F_{veer} = kz = -gm_{tafel}$, waarbij z de uitwijking van de veer is t.o.v. de ruststand zonder massa(!). De maximale trekkracht tijdens de oscillatie treedt op bij het onderste omkeerpunt, dus als $|z| = A + R$, waarbij A de amplitude van de trilling voorstelt, en R de uitrekking van de veer in rust (mèt massa). De maximale uitwijking bedraagt dus $A_{\max} + R = \frac{gm_{tafel}}{k} = \frac{10 \text{ ms}^{-2} \cdot 15 \text{ kg}}{300 \text{ N/m}} = 0.5 \text{ m}$. De uitrekking in rust bedraagt $R = \frac{gm_{massa}}{k} = \frac{10 \text{ ms}^{-2} \cdot 12 \text{ kg}}{300 \text{ N/m}} = 0.4 \text{ m}$, zodat voor de amplitude tenslotte overblijft: $A_{\max} = 0.5 \text{ m} - 0.4 \text{ m} = 0.1 \text{ m}$.

- c) We rekenen eerst het traagheidsmoment uit van de tafel t.o.v. de symmetrie-as loodrecht op het blad:

$$I_3 = \int_0^R \sigma r^2 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi \sigma R^4 = \frac{1}{2} m_{tafel} R^2,$$

waarbij σ de massa per oppervlakte-eenheid is van de tafel. We passen vervolgens het loodrechte-as theorema toe om het traagheidsmoment te krijgen t.o.v. een horizontale as door het middelpunt van het tafelblad:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_3 = \frac{1}{4} m_{tafel} R^2.$$

Tenslotte gebruiken we nu de parallelle-as regel om daaruit het gevraagde traagheidsmoment te krijgen t.o.v. de horizontale as door twee ophangpunten:

$$I'_1 = I_1 + m_{tafel} d^2.$$

Hierin is $d = R/2$ de afstand tussen de kantelas en het midden. R is de straal van het tafelblad. Invullen geeft: $I'_1 = \frac{1}{2} m_{tafel} R^2$.

- d) Er zijn twee mogelijkheden om dit onderdeel op te lossen. Het eerste onderdeel maakt gebruik van de Lagrangevergelijkingen voor deze situatie. De strategie hierbij is om de som T van de spankrachten van de twee overgebleven kabels en het daarmee overeenkomende krachtmoment te beschouwen als gegeneraliseerde 'constraint forces', die noodzakelijk zijn om aan de eis te doen dat de twee ophangpunten waarmee het blad aan die kabels hangt niet van hoogte veranderen. We beginnen met twee gegeneraliseerde coördinaten, namelijk de hoogte h van het massamiddelpunt van het blad en de hoek θ waarover het tafelblad is gekanteld:

$$L = K - V = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 - mgh,$$

waarbij we het subscript "tafel" verder weglaten. De Lagrange-vergelijkingen zijn:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial L}{\partial h} = T \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \end{cases} \quad \text{hieruit volgt:} \quad \begin{cases} \ddot{h} + g = T/m \\ I_1 \ddot{\theta} = \tau = \frac{1}{2} RT \cos \theta \end{cases}$$

De eis ('constraint') dat het ophangpunt op gelijke hoogte blijft komt overeen met de eis dat $h = -\frac{1}{2} R \sin \theta$, en dus $\dot{h} = -\frac{1}{2} R \dot{\theta} \cos \theta$ en $\ddot{h} = -\frac{1}{2} R \ddot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 \sin \theta$. Dit kunnen we invoeren in onze vergelijkingen met behulp van het 'recept' van Lagrange multiplicatoren. Hier substitueren we echter domweg de relatie tussen h en θ in de eerste Lagrange-vergelijking om T direct te bepalen:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}R\ddot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}R\dot{\theta}^2\sin\theta = -g + T/m \\ R\ddot{\theta} = 2(T/m)\cos\theta \end{cases},$$

waaruit we de spankracht vinden als:

$$T(1 + \cos^2\theta) = mg + \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2\sin\theta,$$

hetgeen voor $\theta = 0$ reduceert tot:

$$T = \frac{1}{2}mg.$$

Elk van de twee overgebleven kabels draagt hiervan de helft, dus $\frac{1}{4}mg$. Je had dit ook als volgt 'rechttoe-rechtaan' kunnen uitrekenen, zonder gebruik te maken van de Lagrange-vergelijkingen. Er werken twee krachten op het blad, de som T van de spankrachten van de twee overgebleven kabels en de zwaartekracht $-gm_{\text{tafel}}$.

De som van alle krachten bepaalt de versnelling van het massamiddelpunt:

$$a = \frac{1}{m}(T - mg),$$

De beweging begint met een kanteling rondom de verbindingslijn tussen de overgebleven ophangpunten. Dus is de hoekversnelling $\ddot{\theta}$ direct gerelateerd met de versnelling van het massamiddelpunt:

$$\ddot{\theta} \cdot \frac{1}{2}R = -a \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{2a}{R} = -\frac{2}{mR}(T - mg).$$

Verder geldt dat de hoekversnelling samenhangt met het krachtmoment t.o.v. de kantelas:

$$I_1\ddot{\theta} = \tau = mg \cdot \frac{1}{2}R.$$

Invullen van de uitdrukking voor de hoekversnelling en van het resultaat bij 1c) voor het traagheidsmoment geeft:

$$T - mg = -\frac{1}{2}mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}mg.$$

Elk van de twee overgebleven kabels draagt hiervan de helft, dus $\frac{1}{4}mg$.

e) $a = \frac{1}{m}(T - mg) = -\frac{1}{2}g.$

- f) Het ophangpunt van de doorgesneden kabel ligt op een afstand tot de kantelas die driemaal zo groot is als die tussen het centrum en de kantelas. De minimale (dus maximaal neerwaartse) versnelling treedt op in dit punt en bedraagt dus $-\frac{3}{2}g$. De maximale (maximaal opwaartse) versnelling treedt op in het precies daartegenover gelegen punt. Dat punt ligt even ver van de kantelas als het centrum, en heeft daarom precies de tegengestelde versnelling $+\frac{1}{2}g$. Het kopje dat op de rand van het blad bij de doorgesneden kabel stond valt naar beneden met de normale zwaartekrachtsversnelling $-g$. Dat betekent dat het deel van het blad dat zich direct onder het kopje bevindt, sneller 'valt' dan het kopje zelf en dat het blad en het kopje het contact met elkaar dus verliezen.