

# Tentamen Klassieke Mechanica 2

29 oktober 2007

## Opgave 1

Een homogene massieve bol met straal  $a$  en massa  $m$  met zijn middelpunt in de oorsprong heeft een traagheidsmoment voor rotatie om een as door het middelpunt gelijk aan  $2ma^2/5$ . (U mag dit resultaat zonder berekening gebruiken.) We beschouwen nu een homogene massieve bol van hetzelfde materiaal, met een straal  $b$ . Het middelpunt van de bol met straal  $b$  bevindt zich op de  $z$ -as, op een afstand  $a/2$  van de oorsprong.

- Bereken de massa van deze bol met straal  $b$ .
- Beargumenteer dat de  $x$ -as, de  $y$ -as en de  $z$ -as hoofdtraagheidsassen van de bol met straal  $b$  op deze positie zijn. Bepaal het hoofdtraagheidsmoment behorend bij elk van deze hoofdtraagheidsassen.

Neem nu aan dat  $b = a/2$ . De kleine bol past dus geheel binnen de bol met straal  $a$  om de oorsprong.

- Geef de hoofdtraagheidsassen en de bijbehorende hoofdtraagheidsmomenten van het lichaam dat overblijft als de kleine bol (met middelpunt  $a\mathbf{k}/2$ ) wordt uitgesneden uit de grote bol (met middelpunt in de oorsprong).
- Bepaal het traagheidsmoment van deze bol met bolvormige holte om de rotatie-as in de richting  $(\mathbf{i} + \mathbf{k})/\sqrt{2}$ .

## Opgave 2.

Een wiel met massa  $m$  is bevestigd aan een as. De as is goed bevestigd, zodat die samenvalt met een hoofdtraagheidsmoment van het wiel, en door het zwaartepunt van het wiel gaat. Het wiel heeft een traagheidsmoment  $I$  om de as, en het draait om de as met een hoeksnelheid  $\omega$ . De as is horizontaal, en kan vrij en zonder wrijving draaien om een vast steunpunt, dat een afstand  $a$  heeft tot het zwaartepunt van het wiel. De as heeft een verwaarloosbare massa. We nemen aan dat het impulsmoment als gevolg van de draaiing van de as verwaarloosbaar is vergeleken met het impulsmoment van het wiel.

- Bepaal de grootte en de richting van het impulsmoment  $\mathbf{L}$  van het wiel.

- b. Bepaal de grootte en de richting van het krachtmoment  $\mathbf{N}$  ten opzichte van het vaste steunpunt, als gevolg van de zwaartekracht.
- c. Beargumenteer dat de as horizontaal zal blijven.
- d. Laat zien dat de grootte van het impulsmoment niet verandert onder invloed van het krachtmoment.
- e. Laat zien dat de as roteert met vaste hoeksnelheid in het horizontale vlak. Geef de waarde van deze hoeksnelheid.

**Opgave 3.**

Het ene uiteinde van een veer met rustlengte  $L_0$  en veerconstante  $k$  is bevestigd aan een vaste balk. Aan het andere eind is een katrol bevestigd, waarover een koord met vaste lengte zonder slip beweegt. Het traagheidsmoment en de massa van de katrol zijn verwaarloosbaar, evenals de massa van het koord en van de veer. De vertikaal afhangende lengten van het koord noemen we  $x_1$  en  $x_2$ . Aan het ene uiteinde hangt een voorwerp met massa  $m_1$ , aan het andere een voorwerp met massa  $m_2$ .

- a. Hoeveel vrijheidsgraden heeft dit systeem? Geef de bijbehorende coördinaten.
- b. Geef de kinetische energie, de potentiële energie en de Lagrangiaan van het systeem.
- c. Geef de Lagrange-bewegingsvergelijkingen.
- d. Vind daaruit de bewegingsvergelijking voor de lengte van de veer.
- e. Wat is de lengte van de veer bij de speciale oplossing waarin die lengte constant is? Vergelijk uw antwoord met de lengte van dezelfde veer in rust als daaraan een massa  $m_1 + m_2$  hangt, en verklaar het verschil.