Uitwerking Tentamen Klassieke Mechanica 2

29 oktober 2007

Opgave 1

a. De gegeven grootheden zijn m, a en b. Uitgedrukt in deze gegevens is de verhouding van de volumes van de kleine en de grote bol gelijk aan b^3/a^3. Omdat ze van hetzelfde materiaal zijn hebben de massa's dezelfde verhouding, zodat $m_b = mb^3/a^3$.

b. De z-as is een rotatie-symmetrie-as, en daarmee een hoofdtraagheidsas. Elke as in het xy-vlak is dan ook een hoofdtraagheidsas, dus we kunnen de x- en de y-as als hoofdas kiezen. Het traagheidsmoment van de verplaatste kleine bol om de z-as is gelijk aan het traagheidsmoment ten opzichte van het middelpunt, dus $I_{zz} = 2m_b b^2/5 = 2mb^5/(5a^3)$. Op grond van de stelling voor parallelle verplaatsing krijgt het traagheidsmoment om de x- en de y-as een extra verplaatsingsterm $m_b a^2/4 = mb^3/(4a)$, zodat

$$I_{xx} = I_{yy} = m\frac{b^3}{a}\left(\frac{2b^2}{5a^2} + \frac{1}{4}\right) .$$

c. In geval dat $b = a/2$ worden de hoofdtraagheidsmomenten van de kleine bol $I_{zz} = ma^2/80$, $I_{xx} = I_{yy} = 7ma^2/160$. De hoofdtraagheidsmomenten van de grote bol met de kleine bol eruit gesneden zijn dan het verschil van de hoofdtraagheidsmomenten van de grote en de kleine bol. Dat geeft $I_{zz} = 31ma^2/80$, $I_{xx} = I_{yy} = 57ma^2/160$.

d. Bij de richtingsvector $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})/\sqrt{2}$ en de traagheidstensor $\mathbf{I}$ is het traagheidsmoment $I_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$. Dit geeft $I_{\mathbf{n}} = (I_{xx} + I_{zz})/2 = 119ma^2/320$.

Opgave 2.

a. Omndat de draaiingsas een hoofdtraagheidsas is met traagheidsmoment I is $\mathbf{L} = I\vec{\omega}$. Omdat de as horizontaal is, zijn ook $\mathbf{L}$ en $\vec{\omega}$ horizontaal.

b. Het krachtmoment $\mathbf{N} = -mg\mathbf{a} \times \mathbf{k}$, als $\mathbf{k}$ de vertikaal omhoog is, en $\mathbf{a}$ de vector in de (horizontale) richting van de as is, met lengte a. Dus $\mathbf{N}$ ligt in het horizontale vlak, staat loodrecht op $\mathbf{a}$, en heeft de grootte $N = mga$.

c. Omdat $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$, en $\mathbf{L}$ langs de as ligt, hebben $\mathbf{L}$ en zijn tijdsafgeleide $\dot{\mathbf{L}}$ geen z-component. Dus zal $\mathbf{L}$, en daarmee de as, horizontaal blijven.

d. Omdat het krachtmoment $\mathbf{N}$ loodrecht staat op de as, en daarmee ook op $\mathbf{L}$, geldt dat $d|\mathbf{L}|^2/dt = 2\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{L}} = 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{N} = 0$. Dus de lengte $|\mathbf{L}|$ van het impulsmoment verandert niet.

e. De richting van de tijdsafgeleide $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ is loodrecht op de richting van $\mathbf{L}$, en de grootte $|\dot{\mathbf{L}}| = N$ van de tijdsafgeleide is mga. Dat betekent dat $\mathbf{L}$ een rotatie uitvoert in het horizontale vlak. Als we de hoeksnelheid van deze rotatie Ω noemen, dan geldt $|\dot{\mathbf{L}}| = \Omega L = mga$. Met $L = I\omega$ geeft dit $\Omega = mga/(I\omega)$.

Opgave 3.

a. De toestand van het systeem ligt vast met de lengte L van de veer, en de lengte van één van de afhangende uiteinden. Dus zijn er twee vrijheidsgraden. We kiezen voor de coördinaten L en x_1. (Natuurlijk mag u ook L en x_2 kiezen, maar de keuze x_1 en x_2 is niet mogelijk.)

b. De snelheid van m_1 is $\dot{L}+\dot{x}_1$, de snelheid van m_2 is $\dot{L}+\dot{x}_2 = \dot{L}-\dot{x}_1$. (We gebruiken dat $x_1+x_2 =$ constante.) Dus de kinetische energie bedraagt $T = m_1(\dot{L} + \dot{x}_1)^2/2 + m_2(\dot{L} - \dot{x}_1)^2/2$. De hoogte van m_1 is $-L - x_1$, en die van m_2 is $-L - x_2 = -L + x_1 -$ constante. Dus de potentiële energie bedraagt (op een constante na, die we nul mogen kiezen)

$$V = -(m_1 - m_2)gx_1 - (m_1 + m_2)gL + k(L - L_0)^2/2 \ .$$

De Lagrangiaan is $T - V$.

c. De Lagrange-vergelijking voor x_1 geeft

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + (m_1 - m_2)\ddot{L} = (m_1 - m_2)g \ .$$

De Lagrange-vergelijking voor L geeft

$$(m_1 + m_2)\ddot{L} + (m_1 - m_2)\ddot{x}_1 = -k(L - L_0) + (m_1 + m_2)g \ .$$

d. De bewegingsvergelijking voor de lengte L van de veer vinden we door $\ddot{x}_1$ te elimineren. Uit de eerste Lagrangevergelijking vinden we

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g - \ddot{L}) \ .$$

Invullen in de tweede Lagrangevergelijking geeft dan

$$4\mu(\ddot{L} - g) = -k(L - L_0) \ ,$$

met $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ de gereduceerde massa.

e. Als de veer in rust is, zodat $\ddot{L} = 0$, dan geldt dat $L = L_0 + 4\mu g/k$. De veer is dus uitgerekt door een effectieve kracht $4\mu g$. In de situatie zonder katrol, als er aan de veer alleen een totale massa $m_1 + m_2$ hangt, dan is de zwaartekracht $(m_1 + m_2)g$, zodat de lengte van de veer in rust $L_0 + (m_1 + m_2)g/k$ wordt. Omdat $m_1 + m_2 \geq \mu$ betekent dat dat de veer met de katrol minder ver wordt uitgerekt dan de veer waar de massa $m_1 + m_2$ aanhangt. De oorzaak is dat door de versnelling van het koord ook het zwaartepunt van de beide massa's naar beneden zakt, zodat de veer een kleinere opwaartse kracht hoeft te leveren dan de totale zwaartekracht $(m_1 + m_2)g$. (Als $m_1 = m_2 = m$, dan zal het koord geen versnelling ondergaan als de veer in rust is. In dat geval geldt dat $4\mu = 2m$, en is er geen verschil tussen de situatie met of zonder katrol.)