Tentamen Lineaire algebra 1 NA
13 januari 2017, 14:00–17:00

Dit tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Geef de kern van A_0.

(b) Geef de inverse van A_1.

(c) Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor A_x niet inverteerbaar is.

Opgave 2. Laat L de lijn in $\mathbb{R}^4$ zijn door de punten $(5, -2, 7, 2)$ en $(7, -4, 10, 3)$, en laat P het punt $(-1, 4, 3, 2)$ zijn. In deze opgave bereken je in twee stappen de afstand van P to L.

(a) Bepaal het punt Q op L waarvoor de lijn door P en Q loodrecht op L staat.

(b) Bereken de afstand tussen P en Q.

Opgave 3. Laat V het opspansel zijn van de vectoren $(1, 0, 1, 0)$ en $(3, 1, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^4$. Laat p_V de transformatie van $\mathbb{R}^4$ zijn die elke vector v in $\mathbb{R}^4$ afbeeldt op zijn orthogonale projectie $p_V(v)$ op V.

(a) Wat zijn de eigenwaarden en de eigenruimten van p_V?

(b) Geef een orthogonale basis van V.

(c) Bereken $p_V(v)$ voor de vector $v = (3, 1, 1, 9)$.

— *meer opgaven op de achterkant* —

Opgave 4. Laat A de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ zijn.

(a) Wat zijn de eigenwaarden en eigenruimten van A?

(b) Geef een inverteerbare matrix E en een diagonaalmatrix D zodat $AE = ED$.

(c) Los het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen op:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= 4x \end{aligned}$$

Opgave 5. De $n \times n$-matrix A_n is gegeven als de matrix met getal 2 op de diagonaal en daarbuiten in de eerste rij en kolom het getal 1 en verder het getal 0. Voorbeelden:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bereken de determinant van A_4.

(b) **Bonusvraag (niet verplicht):** geef een formule voor de determinant van A_n als uitdrukking in n. Voor welke $n \geq 2$ is A_n niet inverteerbaar?

— SUCCES!! —