TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1
donderdag 23 december 2004, 10.00-13.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.
Het tentamen bestaat uit twee gedeelten: de eerste drie opgaven betreffen de stof van het eerste gedeelte van het college. De laatste vier opgaven gaan over de stof van het tweede gedeelte van het college. Voor beide onderdelen wordt een cijfer gegeven. Het totaalcijfer is gelijk aan het gemiddelde van beide cijfers waarbij geldt dat het cijfer van het eerste gedeelte vervangen wordt door het toetscijfer indien dit laatste hoger uitvalt. Tenslotte worden bij het totaalcijfer de bonuspunten van de quiz opgeteld.

1a. Gegeven zijn in $\mathbf{R}^3$ de lijnen $m = \text{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $n_x = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ x \end{pmatrix} + \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ voor $x \in \mathbf{R}$.
Bepaal $x \in \mathbf{R}$ zodanig dat m en n_x elkaar snijden. (5 pt)

b. Bereken de cosinus van de hoek waaronder de lijnen m en n_x in (a) elkaar snijden. (2 pt)

c. Zij $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bereken in $\mathbf{R}^3$ een parametervoorstelling van de lijn ℓ die door het punt $(1, 0, 0)$ gaat en de lijn span($\mathbf{v}$) loodrecht snijdt. (8 pt)

2. Los het volgende stelsel vergelijkingen op (geef ook de tussenstappen aan!): (10 pt)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & & = & 2 \\ & x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -4\,. \\ 2x_1 & & -2x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array}$$

3. A is een $m \times n$-matrix met rang 1.

a. Bewijs dat er vectoren $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^m$ en $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ bestaan zodanig dat $A = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$. (5 pt)

b. Neem nu aan dat $m = n$. Laat zien dat er dan een $\lambda \in \mathbf{R}$ bestaat zodanig dat $A^k = \lambda^{k-1}A$ voor $k = 1, 2, 3, \ldots$. (5 pt)

Opgaven 4-7 staan op de andere zijde van dit blad.

4. Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A. (6 pt)

b. Bereken A^{2004}. (6 pt)

5. Bereken de volgende determinanten (geef duidelijk aan hoe je aan het antwoord komt):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad \text{(8 pt)}$$

6. $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is een lineaire afbeelding met eigenvectoren $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bij eigenwaarden resp. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$.

a. Ga na dat er een orthonormale basis van eigenvectoren bestaat en geef zo'n orthonormale basis. (7 pt)

b. Toon aan dat de standaardmatrix van S symmetrisch is. (6 pt)

7. In $\mathbf{R}^2$ zijn de vier punten $(-2, 3)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$ en $(2, 5)$ gegeven. Bepaal een parabool $y = ax^2 + bx$ die door de oorsprong gaat en die zo goed mogelijk bij deze punten past (in de zin van de kleinste-kwadratenbenadering.) (7 pt)

Antwoorden.

1a. $u\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\\x\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ geeft het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 0 &= t-2 \\ u &= -t+5 \\ 2u &= t+x \end{cases}$. Oplossen levert $(t=2, u=3$ en$)$ $x=4$.

b. De cosinus van de hoek is gelijk aan $\dfrac{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

c. Projecteren van $(1,0,0)$ op $\mathbf{v}$ geeft het punt $(1/6,-1/6,1/3)$. Immers

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

ℓ is nu de lijn door de punten $(1,0,0)$ en $(1/6,-1/6,1/3)$ dus een p.v. is $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Andere methode: het vlak V door $(1,0,0)$ en loodrecht op $\mathbf{v}$ heeft vergelijking $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$. V snijden met span($\mathbf{v}$) door $x_1 = t, x_2 = -t, x_3 = 2t$ in de vergelijking van V in te vullen levert $t = 1/6$, dus het snijpunt is $(1/6,-1/6,1/3)$. Nu is ℓ te bepalen als boven.

2. Gausz-Jordaneliminatie toepassen op de uitgebreide matrix $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$ geeft de gereduceerde rijtrapvorm $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -2 \end{array}\right)$. De oplossing is dus

$$\begin{cases} x_1 = t-2 \\ x_2 = \frac{3}{2}t - 6 \\ x_3 = \frac{1}{2}t - 2 \\ x_4 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \quad \text{ofwel} \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-6\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

3a. Aangezien de rang van A gelijk is aan 1 zijn alle kolomvectoren lineair afhankelijk (en niet alle nul), dus alle kolomvectoren zijn parallel met een vaste vector $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^m$: $A = (\lambda_1\mathbf{a}, \lambda_2\mathbf{a}, \ldots, \lambda_n\mathbf{a})$.

Deze uitdrukking is gelijk aan $\mathbf{a}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$ met $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$.

b. Als $m = n$ dan is

$$A^k = \mathbf{a}\mathbf{b}^T\mathbf{a}\mathbf{b}^T \ldots \mathbf{a}\mathbf{b}^T = \mathbf{a}(\mathbf{b}^T\mathbf{a})^{k-1}\mathbf{b}^T = \lambda^{k-1}\mathbf{a}\mathbf{b}^T$$

waarbij $\lambda = \mathbf{b}^T\mathbf{a}$ ($\mathbf{b}^T\mathbf{a}$ is een 1×1-matrix, dus een scalar!)

4a. Het karakteristieke polynoom is $\begin{vmatrix} -X & 1 \\ -6 & 5-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 6$, dus de eigenwaarden zijn 2 en 3. $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ oplossen (d.w.z. $\ker\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ bepalen) geeft de eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; de eigenvector bij e.w. 3 is $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b. Nu is $A = UDU^{-1}$ met $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ de matrix van eigenvectoren en $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ de diagonaalmatrix van eigenwaarden. Nu is voor $n \in \mathbf{Z}$ (en dus ook $n = 2004$)

$$A^n = UD^nU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & 3^n - 2^n \\ 6\cdot 2^n - 6\cdot 3^n & 3\cdot 3^n - 2\cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

5. De antwoorden zijn resp. -1, 2, -3 en -5. De determinant van 6e orde is het eenvoudigst te berekenen door de 2e t/m 6e rij bij de eerste op te tellen; de eerste rij wordt dan een rij met 5-en. Trek vervolgens de eerste rij 1/5 keer van de 2e t/m 6e rij af. De determinant wordt dan $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1)^5 = -5.$

6. Merk op dat $\mathbf{a}_3$ orthogonaal is met $\mathbf{a}_1$ en $\mathbf{a}_2$ (dus $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$). Nu kunnen we m.b.v. de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis maken uit de eigenvectoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ en vervolgens (de eigenvector) $\mathbf{a}_3$ normaliseren: laat $\mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nu vormt $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_3\}$ een orthogonale basis van eigenvectoren ($\mathbf{a}_1$ en $\mathbf{a}_2'$ bij e.w. 1; a_3 bij e.w. -2). Om een orthonormale basis te verkrijgen normalizeren we deze vectoren:

$$\mathbf{b}_1 := \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 := \frac{\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 := \frac{\mathbf{a}_3}{\|\mathbf{a}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b. Uit de spectraalstelling voor symmetrische afbeeldingen volgt dat een lineaire afbeelding symmetrisch is dan en slechts dan als er een orthonormale basis van eigenvectoren bestaat. In feite is de standaardmatrix van S gelijk aan $\lambda_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T + \lambda_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2^T + \lambda_3 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T$ (met de $\mathbf{b}_i$ als boven gedefinieerd), dus

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \frac{-2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix hoeft echter niet expliciet te worden uitgerekend.

7. We moeten in feite het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 4a - 2b &= 3 \\ a - b &= 1 \\ a + b &= 1 \\ 4a + 2b &= 5 \end{cases}$ oplossen, ofwel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ waarbij $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Dit stelsel is overbepaald en heeft i.h.a. geen oplossing. De kleinste-kwadratenmethode bestaat erin, een $\mathbf{x}$ te zoeken zodanig dat $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ minimaal is (als de norm nul is dan is $\mathbf{x}$ een echte oplossing). Als de rang van A (zoals hier) maximaal is en gelijk is aan het aantal kolommen, dan is er een unieke oplossing $\mathbf{x}$, nl. $A\mathbf{x}$ is de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op de kolomruimte van A: dan geldt $\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$, ofwel $(A^T A)\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$. We lossen deze laatste vergelijking op: $A^T A = \begin{pmatrix} 34 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, $A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 34 \\ 4 \end{pmatrix}$. De oplossing is $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \end{pmatrix}$. De gezochte vergelijking is dus $y = x^2 + \frac{2}{5}x$.

TOETS LINEAIRE ALGEBRA 1
donderdag 21 oktober 2004, 10.00-12.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.

1a. Het vlak $V \subset \mathbf{R}^3$ gaat door de punten $(0,1,2)$, $(1,1,-3)$ en $(-1,0,4)$. Bepaal zowel een parametervoorstelling als een vergelijking van V. (10pt)

b. Bepaal in $\mathbf{R}^3$ de afstand tussen het punt P met coördinaten $(2,2,2)$ en de lijn k met parametervoorstelling $\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\lambda \in \mathbf{R})$. (10pt)

c. Bepaal een parametervoorstelling van een lijn ℓ in $\mathbf{R}^3$ die evenwijdig is aan het vlak $x_1 - x_3 = 0$ en de lijn m door de punten $(1,0,1)$ en $(0,1,-1)$ loodrecht snijdt. (10pt)

2. Beschouw het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 10 \\ x_1 & +2x_2 & -4x_3 & & = & 2 \\ x_1 & & -2x_3 & +x_4 & = & 6 \\ & x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -8. \end{array}$$

a. Schrijf het stelsel in de vorm $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met A een matrix en $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ vectoren. Bepaal de oplossing van het stelsel. (10pt)

b. Bepaal bases van de rij- en kolomruimte van A (motiveer je keuze!) en geef de rang van A. (8pt)

c. Is A inverteerbaar? (2pt)

3. Zij $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6\}$ een basis van $\mathbf{R}^6$. Ga na of het stelsel $\{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_4 + \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_5 + \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_6 + \mathbf{b}_1\}$ een basis van $\mathbf{R}^6$ is. (10pt)

4. Beschouw voor $a \in \mathbf{R}$ de matrices $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -2 & -2 & 2a \end{pmatrix}$.

a. Bepaal voor alle $a \in \mathbf{R}$ de rang van A_a. (10pt)

b. Bereken de inverse van A_0. (10pt)

5. A en B zijn twee 2×2-matrices, beide ongelijk aan de nulmatrix O, zodanig dat $AB = O$. Laat zien dat zowel A als B niet-inverteerbaar is en geef een voorbeeld van zulke matrices A en B. (10pt)

ANTWOORDEN.

1a. Richtingsvectoren zijn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Een p.v. is dus

$$\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Een normaalvector van V wordt gegeven door het uitwendig product van de richtingsvectoren, dit is $\pm \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Een vergelijking is dus $5x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$.

b. Door translatie over de vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zien we dat de afstand gelijk is aan de afstand tussen $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en de lijn span$\{\mathbf{a}\}$ met $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Projectie van $\mathbf{b}$ op deze lijn geeft de vector $\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. De afstand hiervan tot $\mathbf{b}$ is $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{11}$.

c. ℓ staat loodrecht op de normaalvector van het vlak en een richtingsvector van m, dus voor de richtingsvector van ℓ kunnen we het uitproduct nemen: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Een p.v. is dus bijvoorbeeld $\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (voor een steunvector kunnen we een willekeurige steunvector van m nemen).

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$. Een rijtrapvorm van de uitgebreide matrix $(A|\mathbf{b})$ is $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ en de gereduceerde rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ (de laatste is uniek). De oplossing volgt nu meteen uit de gereduceerde rijtrapvorm: $\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b. Een basis van de rijruimte is gelijk aan een basis van de rijruimte van de (gered.) rijtrapvorm, dus $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Uit de (gered.) rijtrapvorm zien we dat de 1e, 2e en 4e kolomvector lin. onafh. zijn, dus de 1e, 2e en 4e kolomvector van A vormen een basis van de kolomruimte. (Uit de gereduceerde rijtrapvorm zien we direct dat de 3e kolom van A gelijk is aan $-2\times$ de 1e kolom plus $-1\times$ de 2e kolom). De rang is uiteraard gelijk aan 3.

c. A is niet inverteerbaar, want de rang is kleiner dan 4.

3. Zij $\lambda_1(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)+\lambda_2(\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3)+\lambda_3(\mathbf{b}_3+\mathbf{b}_4)+\lambda_4(\mathbf{b}_4+\mathbf{b}_5)+\lambda_5(\mathbf{b}_5+\mathbf{b}_6)+\lambda_6(\mathbf{b}_6+\mathbf{b}_1)=\mathbf{0}$
Herschikking van termen levert:

$$(\lambda_1+\lambda_6)\mathbf{b}_1+(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{b}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{b}_3+(\lambda_3+\lambda_4)\mathbf{b}_4+(\lambda_4+\lambda_5)\mathbf{b}_5+(\lambda_5+\lambda_6)\mathbf{b}_6=\mathbf{0}$$

Omdat $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_6$ lineair onafhankelijk zijn, is

$$\lambda_1+\lambda_6=\lambda_1+\lambda_2=\ldots=\lambda_5+\lambda_6=0.$$

Dit stelsel vergelijkingen heeft een oplossing $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_5=1, \lambda_2=\lambda_4=\lambda_6=-1$. De vectoren $\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_6+\mathbf{b}_1$ zijn dus lineair afhankelijk.

4a. De rang verandert niet als we elementaire rij-operaties uitvoeren. Verwisselen van de 1e en 2e rij en vegen van de eerste kolom geeft de matrix $A'=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\0 & 1-a^2 & 0\\0 & 2a-2 & 2a-2\end{pmatrix}$. Als $1-a^2\neq 0$ dan kunnen we de tweede rij door $1-a^2$ delen en vervolgens $2a-2$ keer aftrekken van de tweede en we krijgen dan $\begin{pmatrix}1 & a & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2a-2\end{pmatrix}$. Deze matrix heeft rang 3 als $2a-2\neq 0$. Als $2a-2=0$ dan is ook $1-a^2=0$. De gevallen $a=\pm 1$ moeten we apart bekijken. Als $a=1$ dan worden de 2e en 3e rij van A' nul en de rang is dan dus 1. Als $a=-1$ dan wordt de tweede rij nul en de derde is lineair onafhankelijk van de eerste en de rang is dan 2.
Samenvattend: de rang van A is 1 als $a=1$, de rang is 2 als $a=-1$ en de rang is 3 in de overige gevallen.

b. De inverse van $A_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\-2 & -2 & 0\end{pmatrix}$ is gelijk aan $\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1/2\\1 & 0 & 0\\-1 & -1 & -1/2\end{pmatrix}$.

5. Als $AB=O$ en A inverteerbaar is, dan is $O=A^{-1}AB=B$, maar $B\neq O$ gegeven, tegenspraak. Net zo volgt uit B inverteerbaar dat $O=ABB^{-1}=A$. Twee dergelijke matrices zijn bijvoorbeeld $A=B=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$. Of ook: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1
donderdag 11 augustus 2005, 10.00-13.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.
Het tentamen bestaat uit twee gedeelten: de eerste drie opgaven betreffen de stof van het eerste gedeelte van het college. De laatste vier opgaven gaan over de stof van het tweede gedeelte van het college. Voor beide onderdelen wordt een cijfer gegeven. Het totaalcijfer is gelijk aan het gemiddelde van beide cijfers waarbij geldt dat het cijfer van het eerste gedeelte vervangen wordt door het toetscijfer indien dit laatste hoger uitvalt. Tenslotte worden bij het totaalcijfer de bonuspunten van de quiz opgeteld.

---

1. Beschouw het volgende stelsel vergelijkingen :

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +2x_2 & & = & 4 \\ & x_2 & +x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 11 \\ x_1 & & -x_3 & = & a \end{array}.$$

a. Bepaal $a \in \mathbf{R}$ zodanig dat het stelsel een oplossing heeft. (2 pt)

b. Los het stelsel voor de gevonden waarde van a op. (6 pt)

2a. Gegeven zijn in $\mathbf{R}^3$ de lijn $m = \text{span}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en het vlak $V : x_1 - x_3 = 0$. De lijn n ligt in het vlak V en snijdt m onder een hoek θ (met $0° \leq \theta \leq 90°$). Bereken de kleinste en grootste waarde die θ kan aannemen. (5 pt)

b. Zij $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bereken in $\mathbf{R}^3$ een parametervoorstelling van de lijn ℓ die door het punt $(2, -1, 1)$ gaat en de lijn span($\mathbf{v}$) loodrecht snijdt. (7 pt)

3. Beschouw de matrices $B_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 2 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$.

a. Bepaal $a, b \in \mathbf{R}$ zodanig dat de rang van de matrix $B_{a,b}$ kleiner dan 3 is. (5 pt)

b. Ga na, of er $a, b \in \mathbf{R}$ bestaan zodanig dat de rang van $B_{a,b}$ gelijk is aan 1. (3 pt)

c. Bereken $(B_{3,1})^{-1}$ (5 pt)

Opgaven 4 t/m 7 staan op de achterzijde van de pagina.

4. Bereken m.b.v. de regel van Cramer de oplossing van het volgende stelsel vergelijkingen: (8 pt)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ -x & + & 3y & & & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

5. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de eigenwaarden van A. (4 pt)

b. Is A diagonalizeerbaar? Motiveer je antwoord. (3 pt)

c. Bestaat er een geheel getal $n > 0$ zodat $\text{rang}(A^n) \leq 1$? (4 pt)

6. In $\mathbf{R}^4$ is W de lineaire deelruimte opgespannen door de vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een orthonormale basis van W. (4 pt)

b. Bepaal een basis van het orthogonaal complement $W^{\perp}$. (4 pt)

c. Laat $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bepaal $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{w}' \in W^{\perp}$ zodanig dat $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$. (4 pt)

7. In deze opgave noteren we de determinant van de $n \times n$-matrix met kolomvectoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ als $\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Laat nu $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ drie vectoren in $\mathbf{R}^3$ zijn met $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -4$.

Bereken $\det(3\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, 2\mathbf{a} - 4\mathbf{c})$. (5 pt)