ANTWOORDEN.

1a. Richtingsvectoren zijn $\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. Een p.v. is dus

$$\mathbf{x} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Een normaalvector van V wordt gegeven door het uitwendig product van de richtingsvectoren, dit is $\pm\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$. Een vergelijking is dus $5x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$.

b. Door translatie over de vector $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ zien we dat de afstand gelijk is aan de afstand tussen $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ en de lijn span$\{\mathbf{a}\}$ met $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$. Projectie van $\mathbf{b}$ op deze lijn geeft de vector $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$. De afstand hiervan tot $\mathbf{b}$ is $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \sqrt{11}$.

c. ℓ staat loodrecht op de normaalvector van het vlak en een richtingsvector van m, dus voor de richtingsvector van ℓ kunnen we het uitproduct nemen: $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$. Een p.v. is dus bijvoorbeeld $\mathbf{x} = \lambda\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (voor een steunvector kunnen we een willekeurige steunvector van m nemen).

2. $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -4 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}10\\2\\6\\-8\end{pmatrix}$. Een rijtrapvorm van de uitgebreide matrix $(A|\mathbf{b})$ is $\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -1 & 2 & 10\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ en de gereduceerde rijtrapvorm is $\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ (de laatste is uniek). De oplossing volgt nu meteen uit de gereduceerde rijtrapvorm: $\mathbf{x} = \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\0\\4\end{pmatrix}$.

b. Een basis van de rijruimte is gelijk aan een basis van de rijruimte van de (gered.) rijtrapvorm, dus $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Uit de (gered.) rijtrapvorm zien we dat de 1e, 2e en 4e kolomvector lin. onafh. zijn, dus de 1e, 2e en 4e kolomvector van A vormen een basis van de kolomruimte. (Uit de gereduceerde rijtrapvorm zien we direct dat de 3e kolom van A gelijk is aan $-2\times$ de 1e kolom plus $-1\times$ de 2e kolom). De rang is uiteraard gelijk aan 3.

c. A is niet inverteerbaar, want de rang is kleiner dan 4.

3. Zij $\lambda_1(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)+\lambda_2(\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3)+\lambda_3(\mathbf{b}_3+\mathbf{b}_4)+\lambda_4(\mathbf{b}_4+\mathbf{b}_5)+\lambda_5(\mathbf{b}_5+\mathbf{b}_6)+\lambda_6(\mathbf{b}_6+\mathbf{b}_1)=\mathbf{0}$
Herschikking van termen levert:

$$(\lambda_1+\lambda_6)\mathbf{b}_1+(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{b}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{b}_3+(\lambda_3+\lambda_4)\mathbf{b}_4+(\lambda_4+\lambda_5)\mathbf{b}_5+(\lambda_5+\lambda_6)\mathbf{b}_6=\mathbf{0}$$

Omdat $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_6$ lineair onafhankelijk zijn, is

$$\lambda_1+\lambda_6=\lambda_1+\lambda_2=\ldots=\lambda_5+\lambda_6=0.$$

Dit stelsel vergelijkingen heeft een oplossing $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_5=1, \lambda_2=\lambda_4=\lambda_6=-1$. De vectoren $\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_6+\mathbf{b}_1$ zijn dus lineair afhankelijk.

4a. De rang verandert niet als we elementaire rij-operaties uitvoeren. Verwisselen van de 1e en 2e rij en vegen van de eerste kolom geeft de matrix $A'=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 0 & 1-a^2 & 0\\ 0 & 2a-2 & 2a-2\end{pmatrix}$. Als $1-a^2\neq 0$ dan kunnen we de tweede rij door $1-a^2$ delen en vervolgens $2a-2$ keer aftrekken van de tweede en we krijgen dan $\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2a-2\end{pmatrix}$. Deze matrix heeft rang 3 als $2a-2\neq 0$. Als $2a-2=0$ dan is ook $1-a^2=0$. De gevallen $a=\pm 1$ moeten we apart bekijken. Als $a=1$ dan worden de 2e en 3e rij van A' nul en de rang is dan dus 1. Als $a=-1$ dan wordt de tweede rij nul en de derde is lineair onafhankelijk van de eerste en de rang is dan 2.
Samenvattend: de rang van A is 1 als $a=1$, de rang is 2 als $a=-1$ en de rang is 3 in de overige gevallen.

b. De inverse van $A_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$ is gelijk aan $\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1/2\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1/2\end{pmatrix}$.

5. Als $AB=O$ en A inverteerbaar is, dan is $O=A^{-1}AB=B$, maar $B\neq O$ gegeven, tegenspraak. Net zo volgt uit B inverteerbaar dat $O=ABB^{-1}=A$. Twee dergelijke matrices zijn bijvoorbeeld $A=B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Of ook: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.