TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1
donderdag 30 maart 2006, 10.00-13.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.
Het tentamen bestaat uit twee gedeelten: de eerste drie opgaven betreffen de stof van het eerste gedeelte van het college. De laatste vier opgaven gaan over de stof van het tweede gedeelte van het college. Voor beide onderdelen wordt een cijfer gegeven. Het totaalcijfer is gelijk aan het gemiddelde van beide cijfers waarbij geldt dat het cijfer van het eerste gedeelte vervangen wordt door het toetscijfer indien dit laatste hoger uitvalt. Tenslotte worden bij het totaalcijfer de bonuspunten van de quiz opgeteld.

---

1. Beschouw het stelsel vergelijkingen $\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & = & c \\ x_1 & -3x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 0 \\ & 3x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & -5 \end{array}\right.$.

a. Schrijf het stelsel in de vorm $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met A een matrix en $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ vectoren. (1 pt)

b. Ga na voor welke $c \in \mathbf{R}$ het stelsel een oplossing heeft. (7 pt)

c. Bepaal een basis van de kolomruimte van A. Leg je werkwijze uit. (4 pt)

2. V is het vlak in $\mathbf{R}^3$ door de punten $A(0, 1, -2)$, $B(2, 3, 0)$ en $C(1, 1, 1)$.

a. Bepaal zowel een parametervoorstelling als een vergelijking van V. (7 pt)

b. m is de lijn door A en B en ℓ is de lijn door C die m loodrecht snijdt. Bepaal een parametervoorstelling van ℓ. (7 pt)

c. Bepaal de oppervlakte van driehoek ABC. (6 pt)

3. Beschouw voor $a, b \in \mathbf{R}$ de matrices $C_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a^2 & a & a \\ a^2 & b & a \end{pmatrix}$.

a. Bepaal voor alle $a, b \in \mathbf{R}$ de rang van $C_{a,b}$. (7 pt)

b. Bereken $C_{1,0}^{-1}$. (5 pt)

4. Gegeven is de matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bereken B^n voor n geheel. (10 pt)

De rest van de opgaven staat op de andere zijde van dit blad.

5. Zij n een positief geheel getal. De matrix D_n is de $2n \times 2n$-matrix zo, dat

$(D_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 2 & \text{als } i + j = 2n + 1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$. Zo is $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ en $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bereken de determinant van D_7. (6 pt)

6. W is de lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^4$, bestaande uit de vectoren $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ waarvoor geldt dat $x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$.

a. Bepaal orthonormale bases van W en $W^\perp$. (8 pt)

b. Schrijf $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ als $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ met $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{z} \in W^\perp$. (6 pt)

7. Beschouw de kwadratische vorm $q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$.

a. Bepaal een symmetrische matrix A zodanig dat $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ waarbij $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. (2 pt)

b. Toon aan dat $q(\mathbf{x})$ positief definiet is, d.w.z. $q(\mathbf{x}) > 0$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ met $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. (4 pt)

Beschouw de ellips $K \subset \mathbf{R}^2$ met vergelijking $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 = 0$.

c. Bepaal het middelpunt van de ellips en geef de richting van de lange as van de ellips aan. (8 pt)

ANTWOORDEN.

1a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

b. Een rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & | & -11 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-3 \end{pmatrix}$; er is dus een oplossing als $c = 3$.

c. De eerste drie kolommen in de rijtrapvorm (onderdeel b) zijn lin.onafhankelijk; de eerste drie kolommen van A vormen dus een basis van $\mathrm{col}(A)$.

2a. Een p.v. is bijvoorbeeld $\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{R})$. Het uitproduct van de richtingsvectoren geeft een normaalvector van het vlak $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Een vergelijking is dus $3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$.

b. Transleer over $-OA = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Projecteer nu **c-a**$=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ op **b-a**$=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en transleer het resultaat weer over $OA = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dit levert de vector OC' op, waarbij $C'(4/3, 7/3, -2/3)$ de loodrechte projectie van C op AB is. De lijn ℓ heeft richtingsvector CC' en een p.v. is dus
$\mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. Door translatie over $-OA$ gaat de driehoek over in driehoek ODE met $D(2,2,2)$ en $E(1,0,3)$. De oppervlakte is de helft van de norm van het uitproduct $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ van OD met OE. Dit levert als antwoord $\sqrt{14}$.
Een andere methode: $\mathrm{opp}(ODE) = \frac{1}{2}\cdot|OD|\cdot|OE|\cdot\sin\angle DOE$. Nu is $\cos\angle DOE = (OD\cdot OE)/(|OD|\cdot|OE|) = 4/\sqrt{30}$ en dus is $\sin\angle DOE = \sqrt{14}/\sqrt{30}$ en de oppervlakte is $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{14}/\sqrt{30} = \sqrt{14}$.
Nog sneller is het om onderdeel b te gebuiken: immers is $\mathrm{opp}(ABC) = \frac{1}{2}AB \cdot CC'$.

3a. Als $a = 0$ dan is de rang 1. Als $a \neq 0$ dan levert Gausz-eliminatie de matrix $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b-a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. De rang is 2 als $b = a$ en 3 als $b \neq a$. Anders: $\det(C_{a,b}) = a^2(a-b)$ dus de rang is 3 als $a \neq 0$ en $a \neq b$. De gevallen $a = 0$ en $a = b$ apart bekijken.

b. De inverse is $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Het karakteristieke polynoom van B is $(X-2)(X-8)(X+1)$. Dus $B = UDU^{-1}$ waarbij $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ een matrix van eigenvectoren is en $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dan is $B^n = UD^nU^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 1/9 \\ 0 & -2/9 & 7/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2^n\cdot 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7\cdot 8^n + 2\cdot(-1)^n & 7\cdot 8^n - 7\cdot(-1)^n \\ 0 & 2\cdot 8^n - 2\cdot(-1)^n & 2\cdot 8^n + 7\cdot(-1)^n \end{pmatrix}.$$

5. $\det D_7 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3)^7 = -2187$.

6a. Een orthonormale basis van $W^\perp$ is $\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$; een orthonormale basis van W is (gebruik zo nodig Gram-Schmidt) $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

b. $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ is de orthogonale projectie van $\mathbf{v}$ op $W^\perp$; verder is $\mathbf{w}$=$\mathbf{v}$-$\mathbf{z}$=$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Uiteraard is $\mathbf{w}$ ook te vinden door $\mathbf{v}$ orthogonaal op W te projecteren.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. De eigenwaarden van A zijn $d_1 = 2$ en $d_2 = 4$; daar A symmetrisch is, bestaat er een orthogonale matrix U zodanig dat $A = UDU^T$ met $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Dan is $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 2y_1^2 + 4y_2^2$ waarbij $\mathbf{y} = U^T\mathbf{x}$ (en $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$). Het is duidelijk dat $\mathbf{y}^T D\mathbf{y} \geq 0$ en dat gelijkheid optreedt precies als $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ dus $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

c. De matrix U van onderdeel b is een matrix van eigenvectoren: $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. De vergelijking van K kan worden geschreven als $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} = 0$ met $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Met $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ wordt dit $\mathbf{y}^T D\mathbf{y} + \mathbf{b}^T U\mathbf{y} = 2y_1^2 + 4y_2^2 + 4\sqrt{2}y_1 = 0$ dus $(y_1 + \sqrt{2})^2 + 2y_2^2 = 2$. Dit is de vergelijking van een ellips met middelpunt in het y_1, y_2-vlak gelijk aan $(-\sqrt{2}, 0)$ en de lange as is evenwijdig aan de y_1-as. Daar $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ is het middelpunt in het (x_1, x_2)-vlak $(-1, -1)$ en de lange as heeft richtingsvector $U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1
donderdag 22 december 2005, 10.00-13.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.
Het tentamen bestaat uit twee gedeelten: de eerste drie opgaven betreffen de stof van het eerste gedeelte van het college. De laatste vier opgaven gaan over de stof van het tweede gedeelte van het college. Voor beide onderdelen wordt een cijfer gegeven. Het totaalcijfer is gelijk aan het gemiddelde van beide cijfers waarbij geldt dat het cijfer van het eerste gedeelte vervangen wordt door het toetscijfer indien dit laatste hoger uitvalt. Tenslotte worden bij het totaalcijfer de bonuspunten van de quiz opgeteld.

---

1. Beschouw het stelsel vergelijkingen $\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & c \\ 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & -2 \end{array}\right.$.

a. Schrijf het stelsel in de vorm $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, A een matrix en $\mathbf{b}$ een vector. (1 pt)

b. Ga na voor welke c het stelsel een oplossing heeft en bepaal deze oplossing. (7 pt)

c. Wat is de rang van de matrix A? (Motiveer je antwoord.) (2 pt)

2a. V is het vlak in $\mathbf{R}^3$ door de punten $(1, 1, 0)$, $(0, -3, 1)$ en $(1, -1, 1)$. Bepaal zowel een vergelijking als een parametervoorstelling van V. (6 pt)

b. Bereken de hoek die de lijn in $\mathbf{R}^3$ door de punten $(2, 1, 1)$ en $(1, -1, 0)$ maakt met het vlak $x_1 + x_2 = 0$. (6 pt)

c. Bepaal de coördinaten van het punt P in $\mathbf{R}^3$ dat van alle punten op de lijn span$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de kleinste afstand heeft tot de oorsprong. (6 pt)

3. A is de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. I_n staat voor de $n \times n$-eenheidsmatrix.

a. Bestaat er een matrix X zodanig dat $AX = I_n$ voor zekere n? Zo ja, bepaal zo'n matrix X en zo nee, leg uit waarom niet. (7 pt)

b. Bestaat er een matrix Y zodanig dat $YA = I_m$ voor zekere m? Zo ja, bepaal zo'n matrix Y en zo nee, leg uit waarom niet. (7 pt)

4. Bepaal de eigenwaarden van de matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ met hun algebraïsche en meetkundige multipliciteit. Is B diagonaliseerbaar? (Verklaar je antwoord). (8 pt)

5. Beschouw in $\mathbf{R}^4$ de lineaire deelruimte $W = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\}$. Verder is $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$.

a. Bepaal een orthonormale basis van W. (5 pt)

b. Bepaal een basis van $W^\perp$. (6 pt)

c. Bepaal $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{z} \in W^\perp$ zo, dat $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$. (5 pt)

6. Beschouw de kwadratische vorm $q(\mathbf{x}) = 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 9x_2^2$.

a. Bepaal een symmetrische matrix A zodanig dat $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ waarbij $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. (2 pt)

b. Toon aan dat $q(\mathbf{x})$ positief definiet is, d.w.z. $q(\mathbf{x}) > 0$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ met $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. (4 pt)

Beschouw de tweedegraadskromme $K \subset \mathbf{R}^2$ met vergelijking $6x_1^2 - 4x_1x_2 + 9x_2^2 + 10x_1 + 5x_2 = 0$.

c. Wat voor type kegelsnede is K? Geef een standaardvergelijking van K. (7 pt)

d. Teken K in het (x_1, x_2)-vlak. (4 pt)

Er zijn twee versies van opgave 7: 7A en 7B. Studenten die een propedeuse wiskunde doen - al dan niet in combinatie met andere studies (dit is de groep van dr. Redig) maken opgave 7A; studenten die geen wiskunde doen (groep van dr. Kooman) maken opgave 7B.

7A. P is een $n \times n$ matrix die voldoet aan $P^k = P^{k-1}$ voor zekere $k > 2$ (bijv. $P^5 = P^4$). (4 pt)

a. Wat zijn de mogelijke eigenwaarden van P? (4 pt)

b. Indien P symmetrisch is, is P dan een orthogonale projectie ? (4 pt)

c. Indien P diagonaliseerbaar is, is P dan een projectie ? (4 pt)

7B. Zij $\mathbf{a}$ een vector in $\mathbf{R}^3$ met norm $\|\mathbf{a}\| = 1$. Beschouw de afbeelding $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gegeven door $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ ($\times$ geeft het uitwendig of vectorproduct aan).

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is. (4 pt)

b. Leg uit dat T niet-inverteerbaar is. (4 pt)

c. Geef een basis van de nulruimte (of kern) van T. (4 pt)

ANTWOORDEN.

1a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b. Er is een oplossing als $c = 3$: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

c. De rang van de matrix A is 3; in de rijtrapvorm zijn er drie pivots.

2a. Een p.v. is bijvoorbeeld $\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{R})$. De normaalvector van het vlak $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ kan bijv. worden bepaald door het uitwendig product te nemen. Een vergelijking is nu: $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$.

b. Bereken eerst de hoek ϕ tussen de richtingsvector $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ van de lijn en de normaalvector $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ van het vlak: $\cos\phi = \dfrac{n \cdot r}{\|n\| \cdot \|r\|} = \dfrac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $\phi = 30^o$. De hoek tussen het vlak zelf en de lijn is dan 60^o.

c. Eerst transleren over $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zodat de lijn door de oorsprong gaat. Projectie van de vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ op span$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ levert de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$. Translatie over de plaatsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ van de lijn geeft het antwoord $\begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$. Een andere methode bestaat er in, het vlak door de oorsprong en loodrecht op de lijn te snijden met de lijn.

3a. De enige mogelijkheid voor n is 3. Als $X = (\mathbf{x}\ \mathbf{y}\ \mathbf{z})$, dan is $AX = (A\mathbf{x}\ A\mathbf{y}\ A\mathbf{z}) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3) = I_3$, dus de kolomruimte col$(A)$ van A is $\mathbf{R}^3$. Anderzijds is de dimensie van col(A) gelijk aan de rang van A en die is 2. Er bestaat dus niet zo'n matrix X.

b. De enige mogelijkheid voor m is 2. Om een matrix $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_4 & y_5 & y_6 \end{pmatrix}$ te vinden, moeten we het stelsel vergelijkingen

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1 + 2y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 - y_3 = 0 \\ y_4 + 2y_5 + y_6 = 0 \\ y_4 - y_6 = 1 \end{array} \right\}$$

oplossen. Een mogelijke oplossing is $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$, maar er zijn meer mogelijkheden.
Opmerking: zonder te rekenen kunnen we als volgt inzien dat Y bestaat: A heeft rang 2 en dus kunnen we A aanvullen tot een inverteerbare 3×3-matrix A' (door een derde kolom toe te voegen). Dus bestaat er een matrix B zodat $BA' = I_3$. Een matrix Y krijgen we nu door de bovenste twee rijen van B te nemen.

4. Het karakteristiek polynoom is $(X-2)^2(X-1)$. De eigenwaarden zijn 2 (met algebr. en meetk. mult. gelijk aan 1) en 1 met algebr. multipliciteit 2. De rang van $B - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ is 2 dus er is maar één lin.onafh. eigenvector bij eigenwaarde 1 en de meetkundige multipliciteit is 1. De matrix is dus niet diagonaliseerbaar (er is immers geen basis van eigenvectoren).

5a. Een orthonormale basis is (gebruik Gram-Schmidt) $\{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

b. Oplossen van $\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right.$ geeft $W^\perp = \text{span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

c. Orthogonale projectie van $\mathbf{v}$ op W geeft de vector

$$\mathbf{w} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dan $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6a. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

b. Diagonaliseren van A geeft $A = UDU^T$ met $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ en $U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dan is $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ met $\mathbf{y} = U^T\mathbf{x}$, dus $q(\mathbf{x}) = \tilde{q}(\mathbf{y}) = 5y_1^2 + 10y_2^2$. q is positief-definiet omdat $\tilde{q}(\mathbf{y}) > 0$ als $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ dus als $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

c. De vergelijking van K in termen van y_1, y_2 is $5y_1^2 + 10y_2^2 + 5\sqrt{5}y_1 = 0$ ofwel $5(y_1 + \sqrt{5}/2)^2 + 10y_2^2 = 25/4$. De normaalvergelijking is dan $5z_1^2 + 10z_2^2 = 25/4$. Dit geeft een **ellips** weer.

d. de ellips gaat door $(0,0)$, heeft als middelpunt $(-1, -1/2)$ (in y-coördinaten $(-\sqrt{5}/2, 0)$) en heeft symmetrieassen in de richting van de eigenvectoren van A $(2,1)^T$ (de lange as) en $(-1,2)^T$.

7Aa. Als u een eigenvector is met eigenwaarde λ, dan is

$$P^k u = \lambda^k u = P^{k-1}u = \lambda^{k-1}u$$

dit geeft $\lambda^k = \lambda^{k-1}$ of $\lambda^{k-1}(\lambda - 1) = 0$. De enig mogelijke eigenwaarden zijn dus $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.

b. Indien P symmetrisch is, dan is P orthogonaal diagonaliseerbaar, d.w.z,

$$P = Q^T DQ$$

met D een diagonaalmatrix met op de diagonaal enkel nullen of enen (dus $D^2 = D$), en Q een orthogonale matrix. Bijgevolg is dan $P^2 = Q^T DQQ^T DQ = Q^T D^2 Q = Q^T DQ = P$, dus is P een projectie. Omdat gegeven is dat P symmetrisch is, is P een orthogonale projectie.

c. Indien P diagonaliseerbaar is, dan is $P = Q^{-1}DQ$ met D een diagonaalmatrix met op de diagonaal enkel nullen of enen, en Q een orthogonale matrix. Bijgevolg is dan $P^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}DQ = Q^{-1}D^2Q = Q^{-1}DQ = P$ dus is P een projectie.

7B.a. Uitschrijven dat $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{a}\times\mathbf{x} + \mathbf{a}\times\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ en $T(\lambda\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$. Het is ook goed om $T(\mathbf{x})$ als $B\mathbf{x}$ te schrijven met $B = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$ de standaardmatrix van T.

b. Omdat $T(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$ bestaat de kern van T niet alleen uit de nulvector en dus is T niet inverteerbaar.

c. I.h.a. is het uitproduct van een vector $\mathbf{x}$ met $\mathbf{a}$ een vector orthogonaal met $\mathbf{a}$ en lengte gelijk aan $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{a}\|\sin\theta$ met θ de hoek tussen $\mathbf{x}$ en $\mathbf{a}$. Alleen als $\mathbf{x}$ en $\mathbf{a}$ parallel zijn, is $\theta = 0$ en dus $\mathbf{a}\times\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De kern van T is dus span$\{\mathbf{a}\}$.
Anders, m.b.v. de matrix: De matrix B heeft rang (minstens) 2 (immers als de rang 1 was, dan zouden alle kolomvectoren parallel zijn), dus de dimensie van de nulruimte is maximaal 1. De dimensie is ook minstens 1 vanwege (b) en de nulruimte wordt dus opgespannen door de vector $\mathbf{a}$.

TOETS LINEAIRE ALGEBRA 1
donderdag 20 oktober 2005, 10.00-12.00

Elk gegeven antwoord dient te worden gemotiveerd d.m.v. een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.

1a. V is het vlak in $\mathbf{R}^3$ door de punten $(0,2,0)$, $(-1,0,-1)$ en $(-2,1,0)$. Bepaal zowel een vergelijking als een parametervoorstelling van V. (8 pt)

b. W is het vlak in $\mathbf{R}^3$ met vergelijking $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$. P is het punt met coördinaten $(-3,2,-3)$. Bepaal de afstand van P tot W en bepaal de coördinaten van het punt Q op W waarvan de afstand tot P zo klein mogelijk is. (9 pt)

c. Laat $\ell \subset \mathbf{R}^3$ de lijn $\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn. P is het punt $(0,-2,1)$. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn door P die ℓ loodrecht snijdt. (8 pt)

2. Beschouw het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} -x_1 & +3x_2 & & +2x_4 & & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & +4x_3 & & -2x_5 & = & 4 \\ & 4x_2 & +4x_3 & -x_4 & -5x_5 & = & 2 \\ -x_1 & & -3x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & -1 \end{cases}$.

a. Schrijf het stelsel in de vorm $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$, A een matrix en $\mathbf{b}$ een vector. (1 pt)

b. Los het stelsel op. (9 pt)

c. Bepaal de rang van A, de dimensie van de nulruimte van A en geef bases van de rijruimte en de kolomruimte. (9 pt)

d. Heeft de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ voor elke $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ een oplossing? (Motiveer je antwoord!) (4 pt)

3. Bepaal voor alle $a \in \mathbf{R}$ de rang van de matrix $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (8 pt)

4. Gegeven is de matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ga na dat B een inverteerbare matrix is en bereken B^{-2005}. (Opmerking: $B^{-n} = (B^{-1})^n$ als $n > 0$.) (8 pt)

5. Zij $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ een lineair onafhankelijk stel vectoren in $\mathbf{R}^n$ en zij C een $k \times k$-matrix. Laat vectoren $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_k$ gedefinieerd zijn door $\mathbf{a}'_i = \sum_{j=1}^k C_{ij}\mathbf{a}_j$ voor $i = 1, \dots, k$.

a. Bewijs dat $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_k$ lineair onafhankelijke vectoren zijn dan en slechts dan als de matrix C inverteerbaar is. (6 pt)

b. Zij $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ een lineair onafhankelijk stel vectoren in $\mathbf{R}^6$. Ga na m.b.v. (a) of het stelsel $\{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1\}$ lineair onafhankelijk is. (4 pt)

ANTWOORDEN.

1a. Een p.v. is $\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Het uitproduct van de richtingsvectoren is $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, dit levert een normaalvector van V. Een vergelijking is dus $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$.

b. De afstand van P tot W is $d(P, W) = \left| \frac{-3-2+2\cdot-3-1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} \right| = 12/\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$. $Q(-1, 0, 1)$ is het snijpunt van de lijn $\mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ door P loodrecht op W met $W : x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$.

Een tweede manier is om een punt op W te nemen (zeg $S(1, 0, 0)$); de vector $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ projecteren op de normaalvector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ levert de vector $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Nu is $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en dus is Q het punt $(-1, 0, 1)$. De afstand van P tot W is $d(P, Q) = 2\sqrt{6}$.

c. De gevraagde lijn is de lijn door P en het snijpunt R van ℓ met het vlak U door P loodrecht op ℓ. Een vergelijking van U is $x_1 - x_2 + x_3 = 3$. Snijden met ℓ geeft $R(1, 0, 2)$. Een p.v. van de gevraagde lijn is nu $\mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2a. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b. Een gereduceerde rijtrapvorm van de uitgebreide matrix is $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$. De oplossing is dus $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ofwel $\begin{cases} x_1 = t - 3u + 3 \\ x_2 = -u + t + 1 \\ x_3 = u \\ x_4 = -t + 2 \\ x_5 = t \end{cases}$ $(t, u \in \mathbf{R})$.

c. De rang van A is 3 (in de gereduceerde rijtrapvorm zijn er drie rijen), een p.v. van de nulruimte is $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (vergelijk b), dus de dimensie is 2. (Of zo: dim ker(A)=5-rang(A)=5-3=2.) Een basis van de rijruimte wordt gegeven door de rijvectoren in de (gereduceerde) rijtrapvorm, dus $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$. Een basis van de kolomruimte wordt (bijvoorbeeld) gegeven door de kolomvectoren van A waar in de (gereduceerde) rijtrapvorm een pivot staat (dus de 1e, 2e en 4e kolom) $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

d. De vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft een oplossing dan en slechts dan als $\mathbf{b}$ in de kolomruimte col(A) van A ligt. De dimensie van de kolomruimte nu is 3 en dus ligt niet elke $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ in col(A). Er is dus niet voor elke $\mathbf{b}$ een oplossing.

3. Een rijtrapvorm van M_a is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$. De rang is dus 3 als $a \neq 0, 1$. Als $a = 1$ dan is de rang 2, als $a = 0$ dan is de rijtrapvorm $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en de rang is dan ook 2.

4. Merk op dat $B^4 = I$ dus $B^{2005} = B$ en $B^{-2005} = B^{-1} = B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5a. Laat $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ reële getallen zijn zodanig dat $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{0}$. Dan is $\sum_{i,j=1}^k \lambda_i C_{ij} \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$. Uit de lineaire onafhankelijkheid van $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ volgt $\sum_{i=1}^k \lambda_i C_{ij} = 0$ voor $j = 1, \ldots, k$. Dit is een stelsel van k vergelijkingen met k onbekenden met coëfficiëntenmatrix C^T en heeft alleen de nuloplossing precies indien C^T rang k heeft, dus indien C^T inverteerbaar is. Maar C^T is inverteerbaar dan en slechts dan als C inverteerbaar is.

b. De bijbehorende matrix is $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Een rijtrapvorm hiervan is $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en C heeft dus rang 3 en is inverteerbaar. Het stelsel $\{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1\}$ is dus lineair onafhankelijk.