Hertentamen Lineaire Algebra 1

27 maart 2008, 14:00-17:00

Het gebruik van een rekenmachine is NIET toegestaan.

1. (a) Bepaal de vergelijking van het vlak V in $\mathbb{R}^3$ door de punten $(1,0,1)$, $(1,1,2)$ en $(0,2,1)$.

(b) Bereken en parametervoorstelling van de lijn door het punt $p=(1,1,1)$ die loodrecht staat op V, en de afstand tussen p en V.

2. Beschouw het stelsel

$$\begin{aligned} 2x+2y &= 0 \\ 2y-z &= 0 \\ 2x+y+z &= 0 \end{aligned}$$

a) Schrijf het stelsel in de vorm $A \cdot X = B$.

b) Bereken de oplossingen van het stelsel m.b.v. "vegen", en concludeer dat A inverteerbaar is.

c) Bereken de inverse A^{-1} van A.

d) Bereken m.b.v. A^{-1} de oplossing van het stelsel

$$\begin{aligned} 2x+2y &= 2 \\ 2y-z &= -3 \\ 2x+y+z &= 4 \end{aligned}$$

3. Beschouw de matrix

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

met $a \in \mathbb{R}$.

a) Bereken de determinant van $A(a)$.

b) Bepaal alle $a \in \mathbb{R}$ waarvoor $A(a)$ niet inverteerbaar is, en bereken voor deze a de kern en de rang van $A(a)$.

c) Bereken de inverse van $A(1)$.

Opgave 4. t/m 6. z.o.z.

4. Laat $L \subset \mathbb{R}^4$ de lijn zijn opgespannen door de vector $(1, 1, 1, 1)$. Bepaal een orthonormale basis van het orthogonale complement van L.

5. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bereken de eigenwaarden en eigenruimten van A. Bestaat er een basis van de $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvektoren van A?

6. Laat V de vectorruimte zijn van 2×2 matrices, and laat $A \in V$. Beschouw de lineaire afbeelding $L_A : V \longrightarrow V$ gegeven door

$$L_A(X) := A \cdot X \ .$$

(a) Laat zien dat de afbeelding L_A inverteerbaar is dan en slechts dan als de matrix A inverteerbaar is, en dat er in dit geval een matrix $B \in V$ is zodat $L_A^{-1} = L_B$.

(b) Bepaal voor $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ de matrix van L_A t.o.v. een basis van V.