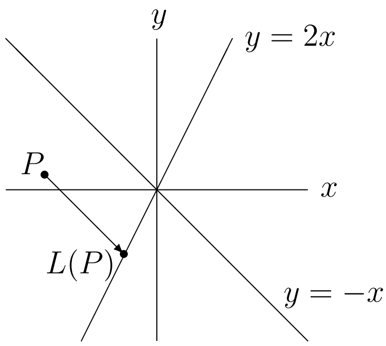
**Proeftentamen Lineaire Algebra 1, najaar 2007**

1. Gegeven is de lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die een punt $P = (x, y)$ langs de lijn $y = -x$ projecteert op de lijn $y = 2x$:




Bepaal eerst de matrix van $L$ ten opzichte van de basis $(1, -1)$, $(1, 2)$, en dan de matrix van $L$ ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$.

2. Beschouw het stelsel

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 2 \\ 2y - z &= -3 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

a) Schrijf het stelsel in de vorm $A \cdot X = B$.

b) Bereken een oplossing van het stelsel m.b.v. "vegen".

c) Bereken de determinant van $A$ en concludeer dat $A$ inverteerbaar is.

d) Bereken de inverse $A^{-1}$ van $A$.

e) Bereken de oplossing van het stelsel m.b.v. $A^{-1}$.

3. Laat zien dat $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ en $(0, 1, 1)$ een basis van $\mathbb{R}^3$ vormen, en bepaal de matrix van de lineaire afbeelding

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad L(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x) \ ,$$

ten opzichte van deze basis.

4. Bepaal een orthogonale basis voor de ruimte van de oplossingen van:

$$\begin{aligned} 2x - y + z - w &= 0 \\ y + z + w = 0 \end{aligned}$$

5. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Bereken de eigenwaarden en eigenruimten van $A$, en geef een basis van de $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvektoren van $A$.

6. Bekijk de vectorruimte $\mathcal{P}_3$, de vectorruimte van polynomen met graad hoogstens 3.

a) Bepaal de dimensie van $\mathcal{P}_3$.

Bekijk vervolgens de afbeelding $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ gedefinieerd door $T\left(f(x)\right) = x \cdot f'(x)$.

b) Toon aan dat $T$ een lineaire afbeelding is.

c) Is $T$ injectief? Is $T$ surjectief?