

Toets Lineaire algebra 1, 25-10-2007, 10.00-11.45

1. a) Bereken de vergelijking van het vlak V in $\mathbb{R}^3$ door de punten $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ en $(2, 2, 1)$.

Oplossing: Een normaalvektor $N = (a, b, c)$ voor V moet loodrecht staan op de vectoren $(2, 1, 2) - (1, 2, 2) = (1, -1, 0)$ en $(2, 2, 1) - (1, 2, 2) = (1, 0, -1)$, dus voldoen aan

$$a - b = (a, b, c) \cdot (1, -1, 0) = 0 \quad , \quad a - c = (a, b, c) \cdot (1, 0, -1) = 0 \quad ;$$

een oplossing hiervan is $a = b = c = 1$ ofwel $N = (1, 1, 1)$. Wegens $(1, 2, 2) \in V$ is de vergelijking van V dan

$$x + y + z = N \cdot (x, y, z) = N \cdot (1, 2, 2) = 5 \quad .$$

b) Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn L door het punt $(2, 2, 2)$ in de richting $(1, 0, 0)$ met het vlak V uit a).

Oplossing: De punten op L zijn die van de vorm $(x, y, z) = (2, 2, 2) + t(1, 0, 0) = (2+t, 2, 2)$ met $t \in \mathbb{R}$. Het voor het snijpunt van L met V moet gelden $x + y + z = 2 + t + 2 + 2 = 5$, ofwel $t = -1$; dit geeft het snijpunt $(2 - 1, 2, 2) = (1, 2, 2)$.

2. a) Los het volgende stelsel lineaire vergelijkingen op.

$$\begin{aligned} x - 2w &= -1 \\ y &= 4 \\ y + z &= 5 \\ 2x - z - 3w &= -1 \end{aligned}$$

Oplossing: M.b.v. rijoperaties is het stelsel te transformeren in het stelsel

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 4 \\ y &= 1 \\ w &= 2 \end{aligned}$$

wat direct de oplossing geeft.

b) Laat zien dat het stelsel

$$\begin{aligned}x - 2w &= 0 \\ y &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 2x - z - 3w &= 0\end{aligned}$$

alleen de triviale oplossing $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ heeft.

Oplossing: Dezelve rijoperaties als in a) transformeren dit stelsel in

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \\ w &= 0\end{aligned}$$

3. Laat $M(m \times n)$ de vektorruimte zijn van $(m \times n)$ -matrices, en K een vaste kolomvektor in $\mathbb{R}^n$. Laat zien dat de deelverzameling U van alle A in $M(m \times n)$ met $A \cdot K = \underline{0}$ een lineaire deelruimte van $M(m \times n)$ is.

Oplossing: We laten zien dat de U de drie nodige eigenschappen heeft.

Het nul-element in $M(m \times n)$ is de nulmatrix (0) , en wegens $(0) \cdot K = \underline{0}$ is (0) in U .

Voor twee matrices $A, B \in U$ geldt $(A + B) \cdot K = A \cdot K + B \cdot K = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ en dus $A + B \in U$.

Voor $A \in U$ en $c \in \mathbb{R}$ geldt $(cA) \cdot K = c(A \cdot K) = c\underline{0} = \underline{0}$ en dus $cA \in U$.

4. a) Laat A een $(n \times n)$ -matrix zijn met de eigenschap $A^2 = A \cdot A = A$, en stel dat $X \neq \underline{0}$ een kolomvektor in $\mathbb{R}^n$ is en a een getal zodat $A \cdot X = aX$. Laat zien dat $a = 0$ of $a = 1$.

Oplossing: Wegens $A^2 = A$ geldt

$$aX = A \cdot X = A^2 \cdot X = A \cdot (A \cdot X) = A \cdot (aX) = a(A \cdot X) = a(aX) = a^2X,$$

ofwel $(a^2 - a)X = \underline{0}$. Wegens $X \neq \underline{0}$ volgt $0 = a^2 - a = a(a - 1)$, dus $a = 0$ of $a = 1$.

b) Laat A een $(n \times n)$ -matrix zijn met de eigenschap $A^2 = A \cdot A = I_n$, waarbij I_n de $(n \times n)$ -eenheidsmatrix is. Stel verder dat $X \neq \underline{0}$ een kolomvektor in $\mathbb{R}^n$ is en a een getal zodat $A \cdot X = aX$. Laat zien dat $a = 1$ of $a = -1$.

Oplossing: Wegens $A^2 = I_n$ en $A \cdot X = aX$ geldt

$$X = A^2 \cdot X = A \cdot (A \cdot X) = A \cdot (aX) = a(A \cdot X) = a(aX) = a^2X$$

ofwel $(a^2 - 1)X = \underline{0}$. Wegens $X \neq \underline{0}$ volgt $0 = a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$, dus $a = 1$ of $a = -1$.

Opmerking: Hierboven maken we twee keer gebruik van het feit dat voor een vektor X en een getal c geldt

$$X \neq \underline{0} \text{ en } cX = \underline{0} \implies c = 0 ,$$

wat equivalent is met

$$c \neq 0 \text{ en } cX = \underline{0} \implies X = \underline{0} ;$$

dit laatste geldt wegens

$$X = \frac{c}{c}X = \frac{1}{c}(cX) = \frac{1}{c}\underline{0} = \underline{0}$$

voor $c \neq 0$.