Antwoorden van het tentamen van 18-12-08 met commentaar.

---

1. a)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   b) De inverse kan worden bepaald d.m.v. Gauss-Jordaneliminatie of m.b.v. de geadjungeerde matrix. De matrix is inverteerbaar als $\det(A) = 0$ maar dit hoeft niet per se van tevoren berekend te worden; als de matrix niet inverteerbaar is wordt dat onderweg wel duidelijk. Hoe dan ook, de matrix is wel inverteerbaar en de inverse is
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

   c) Het antwoord kan worden bepaald met Gausseliminatie maar omdat we de inverse matrix al hebben gaat het sneller als volgt:
$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. De matrix heeft (maximale) rang 3 tenzij de determinant nul is. Nu is $\det(C_a) = 4a^3 + 4$, dus als $a \neq -1$ is $\text{rang}(C_a) = 3$, de kolomruimte is dan de gehele $\mathbb{R}^3$ en de kern is $\{\mathbf{0}\}$ volgens de rangstelling
$$\text{rang}(C_a) \;+\; \dim(\ker)(C_a) \;=\; 3.$$

   Het geval dat $a = -1$ moeten we dus apart bekijken. Omdat de 1e en 2e kolom lineair onafhankelijk zijn, is de rang van C_{-1} gelijk aan 2, en een basis van de kolomruimte van C_{-1} wordt gevormd door (bijvoorbeeld) de eerste twee kolomvectoren, dus $(1, -1, 1)^T$ en $(-1, 0, 2)^T$; de kern heeft dimensie 1 volgens de rangstelling; we bepalen de kern door $C_{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ op te lossen en vinden dat $\ker(C_{-1})=\text{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

3. a) De eigenwaarden zijn de nulpunten van het karakteristieke polynoom $\lambda^2 + \lambda - 6$, dus $\lambda_1 = -3$ en $\lambda_2 = 2$; de bijbehorende eigenvectoren zijn $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) D is de daigonaalmatrix van eigenwaarden, U de matrix van de corresponderende eigenvectoren (let op de volgorde van de kolommen; deze doet er toe). Dus

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) $A^n = UD^nU^{-1}$ dus $A^{14} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^{14} & 0 \\ 0 & 2^{14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$
$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-3)^{14} + 4 \cdot 2^{14} & -2(-3)^{14} + 2 \cdot 2^{14} \\ -2(-3)^{14} + 2 \cdot 2^{14} & 4 \cdot (-3)^{14} + 2^{14} \end{pmatrix}.$

4. a) Een basis wordt gegeven door twee lineair onafhankelijke vectoren die aan de vergelijking voldoen, dus bijvoorbeeld $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.
Nu kan een orthonormale basis worden bepaald met de methode van Gram-Schmidt. Zo'n basis wordt gegeven door

$$\{\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Een andere manier is om een van de beide basisvectoren van W te nemen en het uitwendig product te nemen met de normaalvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ van het vlak W; daarna moeten de beide vectoren nog wel worden genormalizeerd.

b) $\mathbf{b}_1$ is de orthogonale projectie op W dus

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dan is $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Uiteraard kan ook eerst $\mathbf{b}_2$ worden bepaald via $\mathbf{b}_3 = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_3)\mathbf{a}_3$ waarbij $W^\perp = \text{span}\{\mathbf{a}_3\}$, dus $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. a) Het is voldoende om te laten zien dat de matrices lineair onafhankelijk zijn mits wordt opgemerkt dat het stelsel precies $\dim(V) = 4$ matrices bevat. Lineaire onafhankelijkheid aantonen gaat als volgt: neem aan dat er scalairen a, b, c, d zijn zodanig dat

$$aB_1 + bB_2 + cB_3 + dB_4 = O.$$

Dan volgt uit

$$\begin{pmatrix} c+d & a+b \\ -a+b & c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dat $a+b = -a+b = 0$ en $c+d = c-d = 0$ dus $a = b = c = d = 0$.

b) $A = 2B_1 + B_3 - B_4$ dus de coördinaatvector is $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Omdat de dimensie van V gelijk is aan 4, is de matrix van T een 4×4-matrix.

Verder is $T(B_1) = -B_3$, $T(B_2) = B_4$, $T(B_3) = B_1$, $T(B_4) = -B_2$ dus de matrix is

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. a) Laat zien dat $L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$ en dat $L(\lambda\mathbf{x}) = \lambda L(\mathbf{x})$. Gebuik hiervoor de eigenschappen van het inproduct, dus voor de eerste gelijkheid:

$$L(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{a}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}))\mathbf{b} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{y})\mathbf{b} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{b}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{y})\mathbf{b} = L(\mathbf{x})+L(\mathbf{y}).$$

Hierbij is in de eerste stap de distributieve eigenschap van het inwendig product gebruikt, en in de tweede stap de distributieve eigenschap van de scalaire vermenigvuldiging. Houd in de notatie inwendig product en scalaire vermenigvuldiging goed uit elkaar (inproduct met $\cdot$-teken). Het zijn verschillende operaties.

b) Voor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ is $L^2(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot L(\mathbf{x}))\mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

c) Als λ eigenwaarde is van L met eigenvector $\mathbf{x}$, dan is $\mathbf{0} = L^2(\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$. Dus is $\lambda^2 = 0$ en dus ook $\lambda = 0$.

d) Er zijn verschillende antwoorden mogelijk; ik geef twee mogelijke alternatieven:

(1). Omdat $\lambda = 0$ de enige eigenwaarde is, is de algebraïsche multipliciteit van $\lambda = 0$ gelijk aan 3, maar de meetkundige multipliciteit is kleiner dan 3, anders zou $\ker(L) = \mathbb{R}^3$ zijn en dus $L = O$. L is dus niet diagonalizeerbaar.

(2) Als L diagonalizeerbaar is, dan is de standaardmatrix te schrijven als UDU^{-1} met D een diagonaalmatrix van eigenwaarden. Maar volgens (c) is $D = O$ en dus is $L = O$.)