Tentamen Lineaire Algebra 1.

Donderdag 18 december 2008, 10.00-13.00.

Versie voor studenten natuur- en sterrenkunde. Voor studenten wiskunde en studenten met een dubbele propedeuse (WN, WA of WI) is er een aparte versie. Het totale aantal punten dat bij dit tentamen kan worden behaald bedraagt 84.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
Motiveer ieder antwoord met een berekening of een redenering.

---

1. Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ & +2x_2 & -x_3 & = & 1. \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \end{array}$$

   a) Schrijf het stelsel in de vorm $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ waarbij A een 3×3-matrix is en waarbij $\mathbf{x}$ en $\mathbf{b}$ vectoren zijn. (1 pt)
   b) Ga na of A inverteerbaar is en bepaal zo mogelijk de inverse matrix. (8 pt)
   c) Los het stelsel op. (3 pt)

2. Bepaal voor alle (reële) waarden van a de rang, een basis van de kolomruimte en een basis van de kern van de matrix

$$C_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -4a \end{pmatrix}. \qquad \text{(12 pt)}$$

3. A is de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

   a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A. (6 pt)
   b) Schrijf A in de vorm $A = UDU^{-1}$ waarbij D een diagonaalmatrix is en U een inverteerbare matrix. (5 pt)
   c) Bereken A^{14}. (Machten van getallen hoeven niet nader te worden uitgerekend). (4 pt)

Op de volgende bladzijde staat de rest van de opgaven.

4. W is het vlak met vergelijking $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$ en $\mathbf{b}$ is de vector $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   a) Bepaal een orthonormale basis van W. (7 pt)

   $\mathbf{b}$ kan op een unieke manier geschreven worden als $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ waarbij $\mathbf{b}_1 \in W$ en $\mathbf{b}_2 \in W^{\perp}$.

   b) Bepaal $\mathbf{b}_1$ en $\mathbf{b}_2$. (6 pt)

5. Laat V de vectorruimte van 2×2-matrices zijn.

   a) Bewijs dat de matrices

   $$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   een basis vormen van V. (6 pt)

   De basis van onderdeel (a) noemen we $\mathcal{B}$. Verder is A de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   b) Bepaal de coördinaten van A t.o.v. de basis $\mathcal{B}$. (4 pt)

   De lineaire afbeelding $T : V \to V$ wordt gegeven door

   $$T : X \to B_1 X.$$

   c) Bepaal de matrix van T t.o.v. de basis $\mathcal{B}$. (8 pt)

6. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ zodanig dat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ en $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ($\cdot$ staat voor het (standaard) inwendig product op $\mathbb{R}^3$). De afbeelding $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

   $$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b}.$$

   a) Toon aan dat L een lineaire afbeelding is. (4 pt)
   b) Laat zien dat $L^2 = L \circ L$ de nulafbeelding is. (4 pt)
   c) Toon aan dat L geen andere eigenwaarden heeft dan $\lambda = 0$. (3 pt)
   d) Leg uit of L diagonalizeerbaar is. (3 pt)