

# Tentamen Lineaire Algebra I (wiskunde)

Bas Edixhoven

18 januari 2017, 10:00–13:00

Geen rekenmachines, dictaat en aantekeningen. **Motiveer elk antwoord.** Je mag stellingen uit het dictaat gebruiken. Als je een voorbeeld of tegenvoorbeeld geeft, dan moet je alle objecten daarin expliciet definiëren (het lichaam, de vectorruimte, de vectoren,...). **Controleer** zoveel mogelijk je antwoorden.

Er zijn **5 opgaven**. Indicatieve normering:  $15+10+30+20+15=90$ . Succes!

1. Laat  $a = (4, 2, 1, -2)$  en  $v = (3, 3, 5, -1)$  in  $\mathbb{R}^4$ . Laat  $s := s_{a^\perp} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  de spiegeling in het hypervlak  $a^\perp$  zijn.
  - (a) Bepaal  $s(v)$ , en  $v + s(v)$ .
  - (b) Bepaal de projectie van  $v$  op  $a^\perp$ .
  - (c) Geef de eigenwaarden van  $s$ , en van elke eigenruimte een basis (hint: ga niet zomaar rekenen, maar denk eerst na).
  - (d) Bepaal  $\det(s)$ .

2. Laat  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$  in  $\text{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$ .

- (a) Bepaal de gereduceerde rijtrapvorm van  $A$ .
- (b) Geef een basis van  $\ker(A)$ .
- (c) Bepaal de rang van  $A$ .

3. Laat  $U \subset \mathbb{R}^4$  de deelruimte zijn gegeven door  $U = \{(\beta, \alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ . Laat  $V \subset \mathbb{R}^4$  de deelruimte zijn gegeven door  $V = \{(0, \gamma, \delta, \gamma) : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$ .
- Geef een basis  $b_1, b_2$  van  $U$ , en een basis  $c_1, c_2$  van  $V$  (en vergeet niet de nodige argumenten te geven).
  - Laat zien dat  $b_1, b_2, c_1, c_2$  een basis  $B$  van  $\mathbb{R}^4$  is.
  - Laat zien dat  $U$  en  $V$  complementaire deelruimten van  $\mathbb{R}^4$  zijn.
  - Bewijs dat er een unieke lineaire afbeelding  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  is, met de eigenschappen: voor alle  $u \in U$  geldt  $f(u) = u$ , en voor alle  $v \in V$  geldt  $f(v) = 0$ .
  - Geef de matrix van  $f$  ten opzichte van de basis  $B$ .
  - Laat  $E$  de standaardbasis  $E$  van  $\mathbb{R}^4$  zijn. Druk  $[f]_E^E$  uit in  $[f]_B^B$  en de basisveranderingsmatrices.
  - Bereken de matrix  $[f]_E^E$ .
  - Laat  $w = (1, 2, 3, 4)$ . Bereken  $f(w)$ , en controleer dat  $w - f(w) \in V$ .
4. Laat  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  in  $\text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ .
- Bepaal de eigenwaarden van  $A$  en voor iedere eigenwaarde een basis van de eigenruimte.
  - Geef een diagonale matrix  $D$  en een inverteerbare matrix  $P$ , beide in  $\text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ , zodat  $A = PDP^{-1}$ .
  - Geef een voorbeeld van een  $B \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$  die niet diagonaliseerbaar is.
5. (a) Geef de matrix ten opzichte van de standaardbasis van een rotatie in  $\mathbb{R}^2$  over een hoek  $\phi$ .
- (b) Laat  $V$  een  $\mathbb{R}$ -vectorruimte zijn,  $n \in \mathbb{N}$ , en  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow V$  een lineaire afbeelding. Bewijs dat  $f$  injectief is precies dan als  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$  lineair onafhankelijk zijn.
- (c) Laat  $V$  een eindig dimensionale  $\mathbb{R}$ -vectorruimte zijn, en  $U \subset V$  een deelruimte. WAAR of ONWAAR: er is een lineaire afbeelding  $f: V \rightarrow V$  met  $\ker(f) = U$ . Geef een bewijs als je voor WAAR kiest, en een tegenvoorbeeld als je voor ONWAAR kiest. Vergeet niet eerst duidelijk je keuze te vermelden.